بنیادی حساب جبر

مترجم: حذیفہ

$$(\text{ع} + \text{ب})^2 = \text{ع}^2 + \text{ب}^2 + 2\text{عب}$$

$$(\text{ع} - \text{ب})^2 = \text{ع}^2 + \text{ب}^2 - 2\text{عب}$$

بنیادی حساب جبر

مترجم: حذیفہ

مقدمہ مترجم

قبل اس کتاب کو شروع کرنے سے مَیں چند باتیں کہنا چاہتا ہوں

1. یہ ترجمہ ہے (1885) Elementary Algebra کا جو Cambridge University سے چھپی تھی۔
2. اس میں میں نے رقمِ اندلسی استعمال کیا ہے یعنی 0، 1، 2 ... 9 ، نہ کہ رقم اردو یعنی ۰، ۱، ۲ ... ۹ ، کیونکہ اول زیادہ رائج ہے دوسری سے۔
3. اردو میں عدد الٹے نہیں لکھے جاتے جیسے 12، 13، 21، 22 کیونکہ ہم بولتے ہیں بارہ، تیرہ وغیرہ۔ اس میں 'رہ' دس پہ دلالت کرتا ہے، و 'با' دو پہ و 'تِے' تین پہ وغیرہ، و ایسے ہی اکیس، بائیس، وغیرہ میں 'اک' ایک پہ و 'با' دو پہ دلالت کرتا ہے و 'اِیس' بیس پہ۔ و انیس، انتیس وغیرہ انّیاسی تک مستثنی ہیں۔ و 5,347 جیسے عدد کو عربی میں داہنے سے بائیں پڑھا جاتا ہے یعنی "سبعةٌ وأربعون وثلاثُمائةٍ وخمسةُ آلاف"، جس کا اردو ترجمہ ہوگا تیرا قول "سات و چالیس و تین سو و پانچ ہزار"، غالباً یہی وجہ ہے کہ جب ہندی رقم عرب منتقل ہوئے تو عربوں نے ان رقموں کو داہنے سے بائیں کیے بنا ہی استعمال کیا۔ خیر ہم بھی اس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

4. اس کتاب میں عباراتِ نقوشی، مَیں نے Cairo رسم الخط میں لکھا ہے کیونکہ اردو کے دیگر رسم الخط میں نقوش ریاضی کی تحریر موبائل سے دشوار ہے۔
5. اس میں میں یعنی مترجم نے حساب اساسی کے بیان میں ایک مختصر تعلیق کیا ہے جس کے بعد کتاب شروع ہے۔

تعلیق: حساب اساسی کے بیان میں

اعداد مقادیر پہ دلالت کرتے ہیں جیسے ایک سیب، دو انار، تین بلی، چار لڑکے وغیرہ۔ و وہ الفاظ جن سے اعداد کو تعبیر کیا جاتا ہے ان کو **اسماء عدد** کہتے ہیں۔ و تحریر میں اعداد کو نقوش سے تعبیر کیا جاتا ہے جس کے لیے تاریخ میں مختلف نظام رہے ہیں، جن میں سے ہمارے زمانے میں سب سے زیادہ رائج دس عددی نظام ہے جو قدیم ہند میں وضع کیا گیا تھا۔ اس میں صفر سے نوں تک کے اعداد کو مفرد نقوش سے تعبیر کیا جاتا ہے جیسے 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9۔ و اس کے بعد کے اعداد کے لیے انہیں نقوش کو مرکب کرتے ہیں جیسے 10، 11، 12... 99 تک۔ پھر 100، 101، 102... 999 تک۔ پھر 1000، 1001... غیر نہایہ تک۔ و اس طرح ہم بآسانی غیر متناہی اعداد کی تحریر کر سکتے ہیں، یہاں تک کہ ایسے اعداد کی بھی جن کے لیے ہمارے پاس نام نہیں ہیں۔

بہر حال وہ نقوش جن سے اعداد تعبیر کیے جاتے ہیں **رقم** کہلاتے ہیں۔ چونکہ نقوش اعداد پہ دلالت کرتے ہیں اس لیے انہیں ہی عدد کہا جانے لگا، پھر جب یہ

رائج ہو گیا تو نقوش میں و ان کے مدلول میں تمییز کرنے کے لیے مدلول کو علم

ریاضی کی اصطلاح میں **قیمت** کہا گیا۔

بہر حال ہر عدد دوسرے عدد سے یا تو زیادہ ہوتا ہے یا کم جیسے 4 زیادہ ہے 3

سے، اس کا معنی ہے کہ 4 کی قیمت زیادہ ہے 3 کی قیمت سے و اس کی تعبیر

ہوگی 4>3۔ و 2 کم ہے 3 سے و اس کا معنی ہے کہ 2 کی قیمت کم ہے 3 کی قیمت

سے و اس کی تعبیر ہوگی 2<3۔

و علامات < و > ، ایک نقش کی دو صورتیں ہیں و دونوں کا معنی ایک دوسرے کا

عکس ہے کہ 5<6 و 6>5 ۔

و ہر عدد اپنے متساوی ہوتا ہے جیسے 2 متساوی ہے 2 کے، و اس کی تعبیر ہوگی

2=2، و ایسے ہی 4\8 = 2، کیونکہ 4\8 کی قیمت وہی ہے جو 2 کی قیمت ہے و

اس کا بیان آگے آ رہا ہے۔

جاننا چاہیے کہ ان اعداد میں چار قسم کے اساسی عمل کیے جاتے ہیں جمع و

تفریق، و ضرب و تقسیم جن کا بیان درج ذیل ہے۔

جمع کا معنی ہے دو اعداد کو جمع کرنا جیسے 4 و 2 کو جمع کیا تو 6 حاصل ہوا۔
و اس کی تعبیر ہے 4+2=6، یعنی 4 و 2 ایک ساتھ جمع ہو کے متساوی ہوا 6 کے۔
جن اعداد کو جمع کیا جاتا ہے انہیں ہم **مجتمعات** کہیں گے جیسے مثال مذکور میں 4 و 2، و جو حاصل ہوا اس کو **حاصلِ جمع** کہیں گے و اختصاراً **اجتماع** بھی کہ سکتے ہیں جیسے 6، و + وہ علامت ہے جس سے عمل جمع تعبیر کیا جاتا ہے تو اسے **علامت جمع** کہیں گے۔

تفریق کا معنی ہے ایک عدد میں سے دوسرے کو کم کرنا جیسے 4 میں سے 1 کم کیا تو 3 ہوا، و اس کی تعبیر ہوگی 4-3=1۔
جس سے تفریق کرتے ہیں اس کو ہم **مفَّرق مِنہ** کہیں گے جیسے 4، و جس کی تفریق کرتے ہیں اس کو **مفرَّق** کہیں گے جیسے 3، و جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے اس کو **حاصلِ تفریق** کہیں گے و اختصاراً **فرق** جیسے 1، و - کو **علامت تفریق** کہیں گے۔ و تفریق کا عمل کرنے کے لیے یہ شرط ہے کہ مفرق منہ مفرق سے کم نہ ہو، ورنہ نتیجہ حاصل نہ ہو سکے گا جیسے 4-5=؟، کیونکہ ہم چار سیب میں سے پانچ کم نہیں کر سکتے۔

ضرب کا معنی ہے ایک عدد کو دوسرے کے مرتبہ جمع کرنا جیسے 4 کو 3 میں ضرب دیا تو حاصل ہوا 12، کیونکہ جب ہم 4 کو 3 مرتبہ جمع کریں گے تو 12 ہوگا کہ 4+4+4=12 و اس کی تعبیر ہوگی 4×3=12۔

جس کو ضرب دیا جاتا ہے اس کو ہم **مضروب** کہیں گے جیسے 4، و جس میں ضرب دیا جاتا ہے اسے **مضروب فیہ** کہیں گے جیسے 3، و اس کی علامت یعنی × کو **علامت ضرب** کہتے ہیں، و اس کے نتیجہ کو ہم **حاصلِ ضرب** کہیں گے جیسے 12۔ و پڑھنے میں ہم 4×3 کو "4 در 3" پڑھیں گے و 16×28 کو "16 در 28" وغیرہ۔

تقسیم کا معنی ہے کہ ایک عدد کو دوسرے کے برابر، اجزاء میں تقسیم کرنا و یہ بتانا کہ ایک جز میں کتنا آیا جیسے 12 کو 4 سے تقسیم کیا تو 3 حاصل ہوا و اس کی تعبیر ہوگی 12\4 = 3، و اس کا معنی ہے کہ جب ہم نے 12 کے 4 متساوی اجزاء کیے تو ہر جز میں 3 آیا کیونکہ 3+3+3+3=12۔

جس کو تقسیم کیا جاتا ہے اس کو ہم **مقسوم** کہیں گے جیسے 12، و جس سے تقسیم کیا جاتا ہے اس کو **مقسوم بہ** کہیں گے جیسے 4، و جو حاصل ہوا اس کو

حاصلِ تقسیم کہیں گے، و اس کی علامت یعنی \ کو **علامت تقسیم** کہا جاتا ہے۔ و کبھی تقسیم کے بعد کچھ باقی رہتا ہے جیسے 13 کو 4 سے تقسیم کیا تو حاصل تقسیم آیا 3 و 1 باقی رہا تو اس 1 کو **بقیہ** کہیں گے۔ و اس کی تحریر کا طریقہ ہے $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ ۔ اس میں 3 حاصل تقسیم ہے، 1 بقیہ ہے، و 4 مقسوم بہ ہے۔ خوب سمجھ لو۔ و 12\4 کو "12 از 4" پڑھیں گے۔

اس میں شرط یہ ہے کہ مقسوم مقسوم بہ سے کم نہ ہو جیسے 8\4 کیونکہ ہم 4 کو 8 اجزاء میں تقسیم نہیں کر سکتے۔

و تقسیم کی دوسری علامت ہے ÷ جیسے 12÷4 = 3، 27÷3 = 9 ۔

ہندی عددی نظام دس عددی نظام ہے کیونکہ اس میں ہر بعد والے رقم کی قیمت اس کے پہلے والے سے دس گنا زیادہ ہوتی ہے۔ اس میں 0 سے 9 تک کے اعداد کو مفرد رقم سے تعبیر کیا جاتا ہے، پھر 9 کو 0 سے بدلتے ہیں و اس کے بائیں جانب 1 زیادہ کرتے ہیں تو دس بنتا ہے جیسے 9 سے 10۔ پھر 10 کے 0 میں 1 جمع کرتے جاتے ہیں یہاں تک کہ 19 ہو جاتا ہے، پھر 19 کے 9 کو 0 کر دیتے ہیں و 1 کو 2، تو 20 ہو جاتا ہے، ایسے ہی غیر نہایہ تک جاری رہے گا۔

خیر کسی بھی عدد میں وہ رقم جو سب سے داہنے جانب لکھا جاتا ہے اس کو **اکائی** کہتے ہیں، و جو اس کے بائیں جانب آتا ہے اس کو **دہائی** کہتے ہیں، و جو اس کے بائیں جانب آتا ہے اس کو ہم **صدہائی** کہیں گے، پھر **ہزار**، پھر **دس ہزار**، یہ غیر نہایہ تک جاری رہے گا جیسے 7465132 میں 2 اکائی ہے، 3 دہائی ہے، 1 صدہائی ہے، 5 ہزار ہے، 6 دس ہزار ہے، 4 لاکھ ہے، 7 دس لاکھ ہے۔

و یہیں سے معلوم ہوا کہ عدد میں **مقامات** ہوتے ہیں و اس کی ہر رقم کسی نہ کسی مقام پہ ہوتی ہے، و ہر مقام کی ایک مخصوص قیمت ہوتی ہے جو اپنے داہنے والے سے دس گنا زیادہ ہوتی ہے۔ یعنی 2 اگر مقام اکائی میں ہوگا تو اس کی قیمت 2 ہوگی یعنی 1+1، و جب دہائی کے مقام میں ہوگا تو اس کی قیمت 20 ہوگی جو 2 سے دس گنا زیادہ ہے کیونکہ 2×10=20، ایسے ہی صدہائی کے مقام میں وہ ہوگی 20×10=200۔

مقام اکائی	مقام دہائی	مقام صدہائی	مقام ہزار
2			
0	2		
0	0	2	
0	0	0	2

اس جدول میں دیکھا جا سکتا ہے کہ جیسے جیسے ہم داہینے سے بائیں گئے ویسے ویسے 2 کی قیمت دس دس گنا زیادہ ہوتی گئی ہے۔

بہر حال اگر کسی عدد میں کسی رقم کی قیمت معلوم کرنا ہو تو اس رقم کو اس کے مقام کی قیمت میں ضرب دو مثلاً 10067845132 میں 6 کی قیمت حاصل کرنا ہو تو ہم داہنے جانب سے مقامات کو شمار کریں گے یعنی اکائی، دہائی، صدہائی، ہزار، دس ہزار، لاکھ، دس لاکھ کروڑ، تو معلوم ہوا کہ 6 کا مقام کروڑ ہے جس کی قیمت دس لاکھ سے دس کنا زیادہ ہے و اس کی لاکھ سے دس گنا زیادہ ہے وغیرہ، تو ایسے ہی پیچھے تک جا کے ہم کروڑ کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں، و وہ یہاں 1،00،00،000۔ اب ہم اس میں 6 کو ضرب دیں گے تو ہوگا

6،00،00،000۔ تو عدد مزکور میں رقم 6 کی قیمت حاصل ہو گئی و ایسے ہی

دوسرے رقموں کی قیمت بھی معلوم کی جا سکتی ہے۔

خیر اگر رقوم کے مقام مذکور ہوں و کل عدد کی قیمت معلوم کرنا ہو تو ہر رقم کو

اس کے مقام کی قیمت میں ضرب دو، پھر تمام حواصل ضرب کو جمع کرو تو جو

حاصلِ جمع ہوگا وہی عدد کی قیمت ہوگا مثلاً 2 اکائی ہے، 3 صدہائی ہے، 5 ہزار

ہے، 1 دس ہزار ہے۔

اس میں ہم 2 کو ایک میں ضرب دیں گے، و 3 کو سو میں، و 5 کو ہزار میں، و 1

کو دس ہزار میں۔

یعنی 2×1=2، 3×100=300، 5×1000=5000، 1×10000=10000

پھر سب کو جمع کریں گے تو حاصل ہوگا 15302۔ و اس کی جدول ہوگی

مقام اکائی	مقام دہائی	مقام صدہائی	مقام ہزار	مقام دس ہزار
2	0	3	5	1
2=1×2	0=10×0	300=100×3	1000×5 5000=	10000×1 10000=
15302=10000+5000+300+0+2				

جب کوئی رقم مذکور نہ ہو تو وہاں 0 ہوتا ہے، و 0 کی قیمت ہمیشہ 0 ہوتی چاہے وہ کسی بھی مقام پہ آئے۔

جاننا چاہیے کہ بعض عدد کامل تقسیم نہیں ہوتے یعنی اسے تقسیم کرنے پہ کچھ باقی رہتا ہے جیسے 2\7، تو اس کی تحریر کی دو صورتیں ہیں؛ ایک $3\frac{1}{2}$ و دوسری 3.5 و اس نقطہ کو جو 3 و 5 کے درمیان آیا ہے **اعشاریہ** کہا جاتا ہے و اسے ہم "3 اعشاریہ 5" پڑھیں گے۔ لیکن اس تحریر میں عدد کی تحریر پلٹ جاتی ہے مثلا 14.538 یعنی "چودہ اعشاریہ پانچ تین آٹھ" تو اس کے دفاع کے لیے ہمیں کوئی حیلہ کرنے حاجت ہے۔ جس میں سے یہ ہو سکتا ہے کہ ہم نقطہ کو کسی دوسرے نقش سے بدل دیں، پھر جو اعشاریہ کے داہنے جانب ہے اس کو اپنے جدید نقش کے بائیں جانب لکھیں مثلا 14ء835 کہ "چودہ اعشاریہ پانچ تین آٹھ"، لیکن مسئلہ حل کرنے کے عمل میں ہمیں اسے اس کی صورت مروّج پہ لوٹانا ہوگا، جب تک کہ ہم اعمال کا کوئی ایسا طریقہ ایجاد نہیں کر لیتے جو ہماری صورت کے لیے کارآمد ہو۔ یہی وجہ ہے کی اس کتاب میں ہم نے اعشاریہ کو مروج طریقہ یعنی نقطہ سے تعبیر کیا ہے بائیں سے داہنے۔

بابِ اول: حسابِ جبرِ خوارزمی

1. حساب جبر میں مقادیر کو ویسے ہی تعبیر کیا جاتا ہے جیسے حسابِ اساسی میں، لیکن اِس کی تعبیر میں زیادہ عموم ہے، یعنی مقادیر کو حساب اساسی میں ایسے نقوش سے تعبیر کیا جاتا ہے جن کی ایک معین قیمت ہوتی ہے، و ان نقوش کو علماء ریاضی **رقم** کہتے ہیں۔ جب کہ حساب جبر میں مقادیر کو ایسے نقوش سے بھی تعبیر کیا جاتا ہے جن کی ہر وہ قیمت ہو سکتی ہیں جو ہم ان کے لیے وضع کریں۔ و وہ نقوش حروف ہوتے ہیں، عموما ہمارے **حروف ہجا**۔ و کسی قیمت پہ دلالت کرنے کے لیے کسی نقش پہ کوئی قید نہیں ہوتی، لیکن یہ ملحوظ رہے کہ ایک نقش ایک مسئلہ میں ایک ہی قیمت پہ دلالت کرے گا۔ لہذا جب ہم نے کہا کہ "فرض کرو کہ ب = 1"، تو اس سے ہماری یہ مراد نہیں ہے کہ ب کی قیمت ہمیشہ 1 ہوگی، بلکہ خالص ایک مخصوص مسئلہ میں ہوگی جس میں ہم نے فرض کیا ہے۔ و ان نقوش کو **متغیّر** کہتے ہیں۔

مزید یہ کہ ہم نقوش کے لیے کوئی قیمت متعین کیے بنا بھی ان پہ عمل کر سکتے ہیں، و یہی اعمال ہیں جن سے حساب جبر میں خصوصا بحث کی جاتی ہے۔

تو اب ہم حساب جبر کی تعریف سے شروع کرتے ہیں، واضح کرتے ہوئے کہ اعمال حساب کے عام نقوش +، -، ×، ÷، () یعنی علامتِ جمع و تفریق و

ضرب و تقسیم و چاندہ کے یہاں بھی وہی معانی ہیں جو حساب اساسی میں ہیں۔ و تقسیم کی مزید ایک علامت ہے \ جیسے 2\4 یعنی 4÷2 ۔

2. **عبارتِ جبری** نقوش کا مجموعہ ہوتی ہے، جس میں ایک یا زیادہ **حدود** ہو سکتی ہیں، جو ایک دوسرے سے + یا - کی علامت سے جدا ہوتی ہیں۔ لہذا 7ع+5ب-3ج-س+2ف ایک عبارت ہے جس میں پانچ حدود ہیں۔

توضیح: جب کسی حد کے پہلے کوئی علامت نہیں ہوتی، تو وہاں علامت + مقدّر ہوتی ہے جیسے مذکور عبارت میں +7ع ہے۔

3. عبارت یا تو بسیط ہوتی ہے یا مرکب۔ **عبارتِ بسیط** میں فقط ایک حد ہوتی ہے جیسے 5ع، و **عبارت مرکب** میں دو یا زیادہ حدود ہوتی ہیں۔ عبارات مرکب کی مزید تقسیمات بھی ہو سکتی ہیں۔ لہذا دو حدود کی عبارات جیسے 3ع-2ب کو ہم **دو حدی عبارت** کہیں گے، و تین حدود کی عبارت جیسے 2ع-3ب+ج کو **تین حدی عبارت** کہیں گے، و جو تین حدود سے زیادہ سے بنی ہو اس کو **متعدد حدی عبارت** کہیں گے۔

4. جب ایک مقدار کو دوسری میں ضرب دیا جاتا ہے تو اس سے حاصل ہونے والے نتیجہ کو **حاصل ضرب** کہتے ہیں۔ و جس کو ضرب دیا جاتا ہے اس کو ہم **مضروب** کہیں گے و جس میں ضرب دیا جاتا ہے اس کو **مضروب فیہ** کہیں گے۔ حساب اساسی و حساب جبر کے درمیان ایک بڑا فرق ہے جو یہاں

ذکر کیا جا رہا ہے۔ حساب اساسی میں 2 و 3 کا حاصل ضرب 2×3 لکھا جاتا ہے، جب کہ حساب جبر میں ع و بـ کا حاصل ضرب تین طرح لکھا جا سکتا ہے ع×بـ ، ع.بـ ، عبـ ۔ و **عبـ** زیادہ رائج ہے۔ لہذا اگر ع = 2، بـ = 3، تو ان کا حاصل ضرب ہوا عبـ = ع×بـ = 2×3 = 6۔ لیکن حساب اساسی میں 32 کا معنی ہوگا "بتیس" یا 2 + 3×10۔

5. وہ تمام مقادیر جن کو آپس میں ضرب دینے سے کوئی حاصل ضرب آئے تو ان کو اس حاصل ضرب کا **جزِ ضربی** کہیں گے۔ لہذا 5، ع، بـ اجزاء ضربی ہیں حاصلِ ضرب 5عبـ کے۔ و وہ حاصل ضرب ہر ایک جز ضربی کا **حاصل ضربی** کہلائے گا، لہذا 5عبـ حاصل ضربی ہے 5 کا، و ایسے ہی ع کا، و بـ کا۔

6. عبارت کا ہر جزِ ضربی دیگر اجزاء کے مقابل میں **ضریب** کہلاتا ہے تو عبارت 5عبـ میں ہر ایک دوسرے کا ضریب ہے۔ و وہ جز ضربی جو مقدار عددی ہو تو **ضریب رقمی** کہلاتا ہے جیسے 5 ضریب رقمی ہے عبـ کا، و جو مقدار عددی نہ ہو تو **ضریب حرفی** کہلاتا ہے جیسے عبـ 5 کا ضریب حرفی ہے۔

توضیح: اگر ضریب رقمی 1 ہو تو اس کو حذف کر دیا جاتا ہے جیسے ہم 1ع نہیں لکھتے، بلکہ فقط ع لکھتے ہیں۔

7. اگر کوئی مقدار اپنے آپ میں ضرب دی جائے، چاہے جتنے مرتبہ، تو اس مقدار کو ہم **جَذْر** کہیں گے، و اس کی تعداد کو **قَدْر** کہیں گے جس کو ہم جذر کے بائیں جانب بلند لکھ کے ظاہر کریں گے۔

تو ع×ع کو ہم ع^2 لکھیں گے، اس میں ع جذر ہے، بلند 2 قدر ہے و ع^2 ایک ساتھ ان کا حاصل ہے۔

و ایسے ہی ع×ع×ع ہوگا ع^3، اس میں ع جذر ہے و بلند 3 قدر ہے۔

توضیح: و جب قدر 1 ہو تو اس کو حذف کر دیتے ہیں، تو ع^1 نہ لکھ کے ع لکھیں گے۔

و قدر 2 کو **مربَّع** و 3 کو **مکعَّب** کہتے ہیں جیسے جـ^2 یعنی جـ مربع و للا^3 یعنی للا مکعب۔ و اگر اس سے اوپر ہو تو مثلا ع^4 کو "ع بَقدر 4" کہیں گے، و ایسے ہی بـ^5 کو "بـ بَقدر 5" پڑھیں گے۔

8. مبتدی کے لیے ضروری ہے کہ وہ ضریب و قدر میں فرق کرنے پہ خاص توجہ دے۔

مثال اول: اگر ع = 4

تو 3ع = 3×ع = 3×4 = 12

لیکن ع^3 = ع×ع×ع = 4×4×4 = 64

مثال دوم: اگر بـ = 5

4بـ^2 = 4×بـ×بـ = 4×5×5 = 100

جبکہ 2بـ^4 = 2×بـ×بـ×بـ×بـ = 2×5×5×5×5 = 1250

مثال سوم: اگر ع = 6، بـ = 7

تو $\frac{5}{3}$عبـ = $\frac{5}{3}$×ع×بـ = $\frac{5}{3}$×6×7 = 70

تنبیہ- ضریبِ کسری جو 1 سے زیادہ ہوتے ہیں، عموماً ان کو غیر مہذب کسر کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

مثال چہارم: اگر ع = 4، بـ = 1 تو 5بـ^{ع} کتنا ہوا؟

5بـ^{ع} = 5×بـ^4 = 5×1^4 = 5×1 = 5

تنبیہ- آخری مثال میں 1^4 = 1×1×1×1 = 1، اسی طرح 1 کی ہر قدر کا نتیجہ 1 ہوتا ہے۔

9. جب متعدد مختلف مقادیر کو ایک ساتھ ضرب دیا جاتا ہے تو مضمونِ (7) میں بیان کردہ قاعدہ استعمال کیا جاتا ہے۔ تو عع بـبـبـبـ جـ ددد کو ع^{2}بـ^{4}جـد^3 لکھیں گے۔ و ایسے ہی 7ع^{3}جـد^2 کا وہی معنی ہے جو 7×ع×ع×ع×جـ×د×د کا ہے۔

10. حروف جن سے حد مرکب ہوتی ہے وہ **حروفِ حد** کہلاتے ہیں، و ان حروف کی تعداد کو **درجۂ حد** کہتے ہیں، تو عبـجـ کو تین حرفی حد یا تیسرے درجہ کی حد کہا جائے گا، و علا^{4} کو پانچ حرفی حد یا پانچویں درجہ کی حد کہا جائے گا۔

لیکن ضریب رقمی کو شمار نہیں کیا جاتا، لہذا 8ع^{2}د^{5} و ع^{2}بـ^{5}، یہ دونوں ساتویں درجہ کی حد ہیں۔

11. لیکن کبھی حد میں موجود مختلف حروف پہ بھی **درجہ** کا اطلاق ہوتا ہے جیسے 8ع^{3}بـ^{4}جـ جو کہ آٹھویں درجہ کی حد ہے، تو اس میں کہا جا سکتا ہے کہ یہ تین درجہ ع، چار درجہ بـ و ایک درجہ جـ کی حد ہے۔

12. وہ عبارت مرکب جس کی تمام حدود ایک ہی درجہ کی ہوتی ہیں تو اس کو **عبارتِ متجانس** کہتے ہیں، لہذا 8ع^{6}-ع^{4}بـ^{2}+9عبـ^{5} ایک چھٹے درجہ کی عبارت متجانس ہے۔

13. عبارتِ جبری کی تعلیم میں، جہاں حروف ہجا مقدارِ عددی پہ دلالت کرتے ہیں، ہم ان قواعد کا استعمال کریں گے جن سے طالبِ علم حساب اساسی میں مانوس ہو چکا ہے۔ تو عبـ و بـع میں سے ہر ایک دو مقادیر کے حاصل ضرب پہ دلالت کر رہا ہے، جنہیں حروف ع و بـ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ و لہذا دونوں کی، یعنی عبـ و بـع کی، قیمت برابر ہوگی۔ و عبارت عبـجـ ،

عجبـ ، بـعجـ ، جـءبـ ، جـبـع کی قیم برابر ہیں، ہر ایک ان میں سے ع ، بـ ، جـ کے حاصل ضرب پہ دلالت کر رہا ہے۔ یعنی عبارت میں اجزاء ضربی کی ترتیب کا کوئی اعتبار نہیں ہے، مگر عادت جاری ہے انہیں حروف ہجا کی ترتیب پہ مرتب کرنے کی۔

مثال اول: اگر سـ=5 ، فـ=3 تو قیمت نکالو $4سـ^2فـ^3$ کی

$$سـ^2فـ^3 = 4\times5^2\times3^3$$

$$= 4\times25\times27$$

$$= 2700$$

مثال دوم: اگر ع=4 ، بـ=9 ، سـ=6 تو قیمت نکالو $\frac{8بـسـ^2}{27ع^3}$

$$\frac{8بسـ^2}{27ع^3} = \frac{8\times9\times6^2}{27\times4^3}$$

$$= \frac{8\times9\times36}{27\times64} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

14. اگر حاصل ضرب کا ایک جز 0 کے متساوی ہو تو کل حاصل ضرب 0 کے برابر ہوگا لا محالہ، خواہ دوسرے اجزاء کی قیمت کچھ بھی ہو۔ و وہ جز جو 0 ہے **جز صفری** کہلاتا ہے۔

مثال اول: اگر سـ=0 تو $عبـ^3سفـ^2=0$، خواہ ع، بـ ، فـ کی قیمت چاہے جو ہو۔

مثال دوم: اگر جـ=0 تو عبـ^{2}جـ^3=0، خواہ ع ، بـ کی قیمت چاہے جو ہو۔

15. **تعریف:** کسی عبارت کا **جذرِ مربع** وہ مقدار ہے جس کا مربع، یا قدرِ 2، متساوی ہو اس عبارت کے۔ تو 81 کا جذر مربع ہوا 9، کیونکہ $9^2 = 81$.

و جذور کو ہم علامت جذر یعنی بیڑے جاءِ مہملہ سے تعبیر کریں گے، تو ع کا جذر مربع ہوا $\sqrt[2]{}$ ع ، و کبھی جذرِ مربع کے 2 کو حذف کر دیا جاتا ہے جیسے $\sqrt{}$ ع۔

و ایسے ہی کسی عبارت کا **جذر مکعّب** و **چوتھا جذر** و **پانچواں جذر** وہ مقدار ہے جس کی تیسری، چوتھی، پانچویں قدر اس عبارت کے متساوی ہو۔ و مذکورہ جذور کو ہم $\sqrt[3]{}$ ، $\sqrt[4]{}$ ، $\sqrt[5]{}$ وغیرہ سے تعبیر کریں گے۔

مثال: $\sqrt[3]{27} = 3$، کیونکہ $3^3 = 27$

$\sqrt[5]{32} = 2$، کیونکہ $2^5 = 32$

مثال اول: قیمت نکالو $5\sqrt{}$(6ع^{3}بـ^{4}جـ) کی، جب کہ ع=3، بـ=1، جـ=8

$$5\times\sqrt{(6ع^3ب^4ج)} = 5\times\sqrt{(6\times3^3\times1^4\times8)}$$

$$= 5\times\sqrt{(6\times27\times1\times8)}$$

$$= 5\times\sqrt{1296}$$

$$= 5\times36$$

$$= 180$$

مثال دوم: قیمت نکالو $\sqrt[3]{\frac{\text{ع}\,\text{ب}^4}{8\,\text{س}^3}}$ کی، جب کہ ع=9، ب=3، س=5

$$\sqrt[3]{\frac{\text{ع}\,\text{ب}^4}{8\,\text{س}^3}} = \sqrt[3]{\frac{9\times3^4}{8\times5^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9\times81}{8\times125}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9\times9\times9}{1000}}$$

$$= \frac{9}{10}$$

16. طالب علم کو مسئلہ حل کرنے میں درج ذیل باتوں کو ملحوظ رکھنا چاہیے۔

1. یہ صاف طور پہ ظاہر ہونا چاہیے کہ ہر قدم اس کے پہلے والے سے کیسے ثابت ہوا ہے، جس کے لیے اکثر ایک لفظی وضاحت کرنے کی حاجت ہوتی ہے۔
2. **علامت تساوی** یعنی "=" خالص ان مقادیر کو جوڑنے میں استعمال کی جائے گی جو متساوی ہوں۔ مبتدی کو خصوصا اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ علامت تساوی کو کسی مبہم جگہ استعمال نہ کرے۔
3. اگر عبارات بہت مختصر نہ ہو تو علامات تساوی کو متعدد اقدام میں ایک کے تحت دیگر لکھو۔

4. ابتداء میں لکھنے کے انداز و ترتیب میں صفائی کو بہت اہمیت نہیں دی جاتی، لیکن مبتدی کو یہ جان لینا چاہیے کہ صفائی درستگی تک لے جانے والی ہے۔

مثال اول: $\frac{3}{10}\text{عب} - 7\text{س}^2 - \frac{9}{4}\text{عف}^2 + 2\text{ب}^3$ جب کہ ع=5، ب=4، س=3، ف=2

$$\frac{3}{10}\text{عب} - 7\text{س}^2 - \frac{9}{4}\text{عف}^2 + 2\text{ب}^3 = \frac{3}{10}\times 5\times 4 - 7\times 3^2 - \frac{9}{4}\times 5\times 2^2 + 2\times 4^3$$

$$= 6 - 63 - 45 + 128$$

$$= 26$$

مثال دوم: $\frac{3}{5}\text{س}^2 - \text{ع}^2\text{ف} + 7\text{عبس} - \frac{5}{2}\text{ف}^3$ جب کہ ع=5، ب=0، س=7، ف=1

$$\frac{3}{5}\text{س}^2 - \text{ع}^2\text{ف} + 7\text{عبس} - \frac{5}{2}\text{ف}^3 = \frac{3}{5}\times 7^2 - 5^2\times 1 + 0 - \frac{5}{2}\times 1^3$$

$$= 29\frac{2}{5} - 25 - 2\frac{1}{2}$$

$$= 1\frac{9}{10}$$

تنبیہ: اس مثال میں 0 نے نتیجہ کو متاثر نہیں کیا۔

مثال سوم: جب پ=9، ر=6، ک=4 تو قیمت نکالو

$\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\text{پر}}{\text{ک}^2}\right)} + \sqrt{(5\text{پ} + 3\text{ر} + 1)} - \frac{2\text{ب}^2}{9\text{ک}}$ کی۔

$$\frac{2\text{ب}^2}{9\text{ک}} - \sqrt{1 + 3\text{ر} + 5\text{پ}} + \sqrt[3]{\frac{\text{ر}\,\text{پ}}{\text{ک}^2}} \;\frac{1}{3}$$

$$\frac{36\times 2}{4\times 9} - \sqrt{1 + 18 + 45} + \sqrt[3]{\frac{54}{16}} \;\frac{1}{3} =$$

$$2 - \sqrt{64} + \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \;\frac{1}{3} =$$

$$2 - 8 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{2}6 =$$

بابِ دوسرا: مقدارِ سلبی، و حدودِ متشابہ کا جمع

17. حساب اساسی میں طالب علم عادی ہو جاتا ہے ایسی مقادیر عددی میں عمل کرنے کا جو علامت + و - سے مرکب ہوں، و عبارت کی قیمت نکالنے کا مثلا $1\frac{3}{4}+7\frac{2}{3}+6-4\frac{1}{5}$ ۔ و یہ جان لیتا ہے کہ جس حد کے پہلے + ہے وہ **جمعی** ہے و جس کے پہلے - ہے وہ **تفریقی** ہے، جب کہ پہلی حد یعنی $1\frac{3}{4}$ ، جس پہ کوئی علامت نہیں ہے، اس کو حدود جمعی میں شمار کیا جاتا ہے، و ایسا ہی حساب جبر میں ہے۔ لہذا عبارت 7ع+3بـ-4جـ-2د میں ہم 7ع و 3بـ کو جمعی کہیں گے، جب کہ 4جـ و 2د کو تفریقی کہیں گے۔

18. لیکن حساب اساسی میں جمعی حدود کا اجتماع ہمیشہ تفریقی حدود کے اجتماع سے زیادہ ہوتا ہے، و اس کے عکس کا کوئی معنی نہیں ہوتا۔ مگر حساب جبر میں نہ صرف تفریقی حدود کا اجتماع جمعی حدود کے اجتماع سے زیادہ ہو سکتا ہے، بلکہ ایک تفریقی حد تنہاں قائم ہو سکتی ہے، جس کا ایک معقول معنی ہو۔ لہذا تمام مقدار جبری کو ان کے پہلے آنے والی علامات + و - کے اعتبار سے **ایجابی مقادیر** و **سلبی مقادیر** میں تقسیم کیا جاتا ہے، جمع و تفریق کے عمل سے قطع نظر ہو کے۔

یہ مفہوم چند مثالوں سے واضح ہو جائے گا۔

1. فرض کرو کہ ایک آدمی نے 100 روپے پایا و پھر 70 روپے گواں دیا تو اس کو 30 روپے کا نفع ہوا۔ لیکن اگر وہ پہلے 70 روپے پاتا پھر 100 روپے گوانتا تو اس کو 30 روپے کا نقصان ہوتا۔

   اس کے مطابق عبارات جبری ہوگی

   100ر-70ر = +30ر

   70ر-100ر = -30ر

   دوسری صورتِ حال میں مقدار سلبی کو قرض کے طور پہ تعبیر کیا گیا ہے، یعنی پیسے کی ایسی مقدار جو صفت میں مقدار ایجابی، یا نفع، کے خلاف ہے جو پہلی صورت حال میں مذکور ہے۔ بلکہ یہ کہا جا سکتا ہے کہ اس میں تفریقی صفت ہے جو مستقبل میں ہونے والے تصرف کو متاثر کرے گی، یا مستقبل کے کل نفع کو پلٹ دے گی۔

2. فرض کرو کہ ایک آدمی ایک سیدھی سڑک پہ 100 میٹر آگے چلا پھر 70 میٹر پیچھے چلا تو مقامِ ابتدا سے اس کا بُعد 30 میٹر ہوا۔ مگر اگر وہ 70 میٹر آگے چلتا و 100 میٹر پیچھے چلتا تب بھی اس کا بُعد مقام ابتدا سے 30 میٹر ہوتا، لیکن مخالف جانب میں۔ تو پہلے کی طرح اس میں بھی ہوگا

   100م-70م = +30م

   70م-100م = -30م

   و یہاں ہم نے دیکھا کہ علامت تفریقی مخالف جانب پہ دال ہے۔

یہاں مزید مثالیں بھی دی جا سکتی ہیں۔ لیکن طالب علم کو اتنا بتا دینا کافی ہوگا کہ جب ضروری ہو تو تفریقی مقادیر کی کچھ نہ کچھ تعبیر ضرور کی جا سکتی ہے۔ ان قواعد کے اطلاق میں جو ہم مقادیرِ جبری کے جمع و تفریق کے لیے بیان کرنے جا رہے ہیں، مقادیر کی طبیعت و معنی کو ہر وقت مستحضر رکھنا ضروری نہیں ہے، خواہ ایجابی ہو یا سلبی، بہر حال تجربہ سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ قواعد ہمیشہ صحیح ثابت ہوں گے، جب بھی حساب جبر کے نتیجہ کو جو نقوش میں ہوتا ہے، طبیعی زبان میں تعبیر کیا جائے گا۔

19. **تعریف:** وہ حدود جو متفرق نہیں ہوتی ہیں یا خالص ضریب رقمی میں ہوتی ہیں تو انہیں **حدودِ متشابہ** کہا جاتا ہے، ورنہ **غیر متشابہ** کہا جاتا ہے۔ لہذا 3ع، 7ع؛ 5ع^{2}ب، 2ع^{2}ب؛ 3ع^{3}ب^2، 4ع^{3}ب^2 حدود متشابہ کے جوڑے ہیں۔ و 4ع، 3ب؛ 7ع^2، 9ع^{3}ب جوڑے ہیں غیر متشابہ حدود کے۔

حدود متشابہ کو جمع کرنے کے **چار قواعد** ہیں

1. حدودو متشابہ کو جمع کرنے کا نتیجہ ان کے متشابہ ہوگا۔
2. اگر ہر حد ایجابی ہو تو ان کے ضریبِ رقمی کو جمع کر دو جیسے

مثال: 8ع+9ع = 17ع

مبتدی کو اس کی حقیقت تب سمجھ میں آئے گی جب وہ اس بات میں غور کرے گا کہ 8 گرام کو جب 9 گرام کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے تو 17 گرام ہوتا ہے۔

و ایسے ہی 8ع+9ع =17 ع

و $\quad$ 8ع+9ع+ع+2ع+7ع = 27ع

3. اگر ہر حد سلبی ہو تو ان کو جمع کرو پھر ان کے اجتماع کے پہلے علامت سلب زیادہ کرو جیسے -3سـ ، -5سـ، -7سـ ، -سـ کا اجتماع ہوگا -16سـ یعنی مال کی کسی مقدار سے یک بَعدِ دیگر 3 ، 5 ، 7 و 1 کی تفریق کیا، تو وہ ایک ساتھ 16 کی تفریق ہوئی۔
4. اگر حدود کی علامات مختلف ہوں تو ہر ایجابی حد کے ضریب رقمی کو ایک ساتھ جمع کرو و ہر سلبی حد کے ضریب رقمی کو ایک ساتھ جمع کرو، تو ان دونوں میں جو فرق ہوگا وہ بڑی مقدار کی علامت کے ساتھ نتیجۂ مطلوب کا ضریب رقمی ہوگا۔

مثال اول: 17سـ و -8سـ کا نتیجہ ہوا 9سـ، کیونکہ 17 و 8 میں 9 کا فرق ہے، و زیادہ مقدار یعنی 17سـ ایجابی ہے۔

مثال دوم: 8ع، -9ع، -ع، 3ع، 4ع، -11ع، ع کا نتیجہ نکالنے کے لیے، تمام ایجابی حدود کے ضریبِ رقمی کا اجتماع کیا تو ہوا 16ع، و تمام سلبی حدود کے ضریب رقمی کا اجتماع ہوا 21ع۔ و دونوں کا فرق ہوا 5، و زیادہ مقدار سلبی ہے تو نتیجہ مطلوب ہوا -5ع۔

بہر حال اس قاعدہ میں بہت شدت برتنے کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ حدود میں جمع و تفریق کسی بھی ترتیب پہ کیے جا سکتے ہیں، و ہم وہ ترتیب اختیار کر سکتے ہیں جو سب سے مناسب ہو۔

توضیح: دو مقادیر متساوی کا اجتماع جن کی علامات مختلف ہوں 0 ہوتا ہے، لہذا 5ع و -5ع کا اجتماع 0 ہوگا۔

مثال سوم: $\frac{2}{3}\text{ع}$, 3ع , $-\frac{1}{6}\text{ع}$, -2ع کی قیمت نکالو

$$= 3\frac{2}{3}\text{ع} - 2\frac{1}{6}\text{ع}$$

$$= 1\frac{1}{2}\text{ع}$$

$$= \frac{3}{2}\text{ع}$$

باب تیسرا: چاندہ، عملِ جمع

20. جب حساب اساسی میں کئی مقادیر علامت + و - سے مرکب ہوتی ہیں تو نتیجہ کی قیمت ہمیشہ ایک ہی ہوتی ہے خواہ حدود کی ترتیب کچھ بھی ہو۔ و یہ قاعدہ حساب جبر میں بھی جاری ہوتا ہے۔

لہذا ء-بـ+جـ متساوی ہے ء+جـ-بـ کے، کیونکہ پہلی عبارت میں ء سے بـ کو کم کیا، پھر اس کے نتیجہ میں جـ زیادہ کر دیا، و دوسری عبارت میں پہلے ء کو جـ کے ساتھ جمع کیا، پھر اس میں سے بـ کو کم کر دیا۔ و اس توجیہ کا اطلاق تمام عبارات جبری پہ ہوتا ہے۔ لہذا ہم عبارت میں حدود کو جیسے چاہیں ویسے مرتب کر سکتے ہیں، یعنی عبارت ء-بـ کو -بـ+ء لکھا جا سکتا ہے۔

اس کی توضیح کے لیے ہم فرض کریں گے کہ ء سے مراد ہے ء روپے کا نفع، و -بـ سے مراد ہے بـ رپیہ کا نقصان۔ و یہ بالکل مقطوع نظر ہے کہ نفع پہلے ہوا یا نقصان۔

21. **چاندے** یعنی ( )، اس بات پہ دلالت کرتے ہیں کہ جو کچھ اس کے اندر ہے وہ ایک حد کے قائم مقام ہے۔ و چاندے کا کامل استعمال ساتویں باب میں بیان کیا جائے گا۔ خیر، یہاں ہم خالص سہل امور کی بحث کریں گے۔

تو 8+(13+5) کا معنی ہے کہ 13 و 5 کو جمع کیا جائے گا، پھر ان کے اجتماع کو 8 کے ساتھ جمع کیا جائے گا۔ ظاہر ہے کہ 13 و 5 کو الگ الگ یا ایک ساتھ جمع کرنے سے نتیجہ متاثر نہ ہوگا۔

لہذا 8+(13+5) = 8+13+5 = 26

ایسے ہی ء+(بـ+جـ) کا معنی ہے کہ بـ و جـ کے اجتماع کو ء کے ساتھ جمع کیا گیا۔

لہذا ء+(بـ+جـ) = ء+بـ+جـ

و 8+(13-5) کا معنی ہے کہ 8 کے ساتھ 5 پہ 13 کی زیادتی کو جمع کیا جائے گا۔ تو اب اگر ہم 13 کو 8 کے ساتھ جمع کریں تو 5 بھی جمع ہو جائے گا، یعنی نتیجہ سے 5 کو کم کرنا ہوگا۔

لہذا 8+(13-5) = 8+13-5 = 16

ایسے ہی ء+(بـ-جـ) کا معنی ہے کہ ء میں ہم کو جمع کرنا ہے بـ جس مین سے جـ کم گیا ہے۔

لہذا ء+(بـ-جـ) = ء+بـ-جـ ....(1)

ایسے ہی ء+بـ-جـ+(د-ر-ش) = ء+بـ-جـ+د-ر-ش ....(2)

اس کے بر عکس ء+بـ-جـ+د-ر-ش = ء+بـ-جـ+(د-ر-ش) ....(3)

ایسے ہی ء-بـ+جـ = ء+جـ-بـ

= ء و جـ-بـ کا اجتماع

= ء و -بـ+جـ کا اجتماع

لہذا ع-بـ+جـ = ع+(-بـ+جـ) ....(4)

خیر (1)، (2)، (3)، (4) کے نتائج کے مد نظر ہمیں درج ذیل قاعدہ حاصل ہوا۔

قاعدہ: جب عبارت ایسے چاندے میں ہوں جس کے قبل علامت + ہو، تو عبارت میں کوئی تبدیلی کیے بنا چاندے کو ساقط کیا جا سکتا ہے۔

اس کے بر عکس عبارت کے کسی بھی جز کو چاندے میں بند کر کے و اس کے قبل علامت + زیادہ کی جا سکتی ہے، و اس سے چاندے کی کسی حد کی قیمت تبدیل نہ ہوگی۔

لہذا عبارت ع-بـ+جـ-د+ﷲ کو درج ذیل طریقہ پہ لکھا جا سکتا ہے۔

ع+(-بـ+جـ-د+ﷲ)

ع-بـ+(جـ-د+ﷲ)

ع-بـ+جـ+(-د+ﷲ)

22. عبارت ع-(بـ+جـ) کا معنی ہے کہ ع سے ہمیں بـ و جـ کے اجتماع کو کم کرنا ہے، خواہ ایک ساتھ کم کریں یا الگ الگ نتیجہ متغیر نہ ہوگا۔

لہذا ع-(بـ+جـ) = ع-بـ-جـ

جب کہ ع-(بـ-جـ) کا معنی ہے کہ ہمیں ع سے جـ پہ بـ کی زیادتی کو کم کرنا ہے۔ اگر ہم ع سے بـ نکالیں گے تو ع-بـ ہوگا۔ لیکن تب جـ بھی کم ہو جائے گا، یعنی ہمیں جـ کو ع-بـ کے ساتھ جمع کرنا ہوگا۔

لہذا ع-(بـ-جـ) = ع-بـ+جـ

اسی طرح ع-بـ-(جـ-د-ﷲ) = ع-بـ-جـ+د+ﷲ

بوجہ مذکور درج ذیل قاعدہ حاصل ہوا۔

قاعدہ: حب کوئی عبارت ایسے چاندے میں ہو جس سے قبل علامت - ہو، تو چاندے کو ساقط کیا جا سکتا ہے، اس کے اندر موجود تمام حدود کی علامات کو تبدیل کر کے۔

اس کے بر عکس عبارت کے کسی بھی جز کو چاندے میں بند کر کے اس کے قبل علامت - زیادہ کی جا سکتی ہے، و تب چاندے میں موجود ہر حد کی علامت تبدیل ہو جائے گی۔

لہذا عبارت ع-بـ+جـ+د-ر کو درج ذیل صورت پہ لکھا جا سکتا ہے

ع-(+بـ-جـ-د+ر)

ع-بـ-(-جـ-د+ر)

ع-بـ+جـ-(د+ر)

23. ہم نے دیکھا کی جب دو یا زیادہ حدود متشابہ کو جمع کیا جاتا ہے تو اس کا نتیجہ ایک حد آتی ہے، لیکن حدود غیر متشابہ کو جمع نہیں کیا جا سکتا، لہذا ہم ع و بـ کے اجتماع کو ع+بـ لکھیں گے۔

مزید یہ کہ سقوط چاندے کے قاعدہ سے معلوم ہوا ہے کہ

ع+(-بـ) = ع-بـ یعنی ع و -بـ کے اجتماع کو ع-بـ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال اول: ع، ع^{2}، ع^{3} کا اجتماع بتاو۔

چونکہ حروف مشترک مختلف اقدار کے ساتھ غیر متشابہ حدود ہوتی ہیں، تو ان کا اجتماع ہوگا ع+ع^{2}+ع^{3}۔ و یہ عبارت مزید مختصر نہیں ہو سکتی۔

مثال دوم: ع، -ع^{2}، -ع^{3}، ع^{4} کا اجتماع ہوا ع-ع^{2}-ع^{3}+ع^{4}۔

مثال سوم: 3ع-5بـ+2جـ و 2ع+3بـ-جـ کا اجتماع کرو

عمل اجتماع کو ایسے بھی لکھا جا سکتا ہے

3ع-5بـ+2جـ+(2ع+3بـ-جـ)

= 3ع-5بـ+2جـ+2ع+3بـ-جـ

= 3ع+2ع-5بـ+3بـ+2جـ-جـ

= 5ع-2بـ+جـ

حدود متشابہ کو ایک ساتھ کر کے۔

مسئلہ مزید سہولت سے حل کیا جا سکتا ہے درج ذیل طریق پہ

3ع - 5ب + 2ج
2ع - 3ب - ج
5ع - 2ب + ج

قاعدہ: عبارت کو ایسے مرتّب کرو کہ حدود متشابہ ایک عمود میں جمع ہو جائیں، پھر ہر عمود کو جمع کرو داہنے سے شروع کرتے ہوئے۔

مثال: 3ع-7ب+2ج؛ 6ع-ب+5ج؛ -4ع+3ب-8ج کا اجتماع ہوگا۔

3ع - 7ب + 2ج
6ع - ب + 5ج
-4ع + 3ب - 8ج
5ع - 5ب - ج

24. مذکور مثالوں سے معلوم ہوا کہ حساب جبر میں اجتماع کا معنی حساب اساسی سے عام ہے۔ کیونکہ حساب اساسی میں ع-ب کا معنی ہے ع سے ب کو کم کرنا، جب کہ حساب جبر میں اس کا معنی دو مقادیر یعنی ع و -ب کا اجتماع ہے، قطع نظر ہو کے ع و ب کی قیمت سے۔ و جب مقادیر کو + و - سے مرکب کیا جاتا ہے، تو نتیجہ میں آنے والی عبارت کو **اجتماع جبری** کہا جاتا ہے۔

لہذا عبارت 11ع-27ع+13ع = -3ع، دال ہے کہ 11ع، -27ع، 13ع کا اجتماع جبری متساوی ہے -3ع کے۔

25. اگر ایسی عبارات جبری کو جمع کرنا ہو جن کی حدود میں مشترک حروف مختلف اقدار کے ساتھ مذکور ہوں تو افضل ہے کہ عبارت کو اس حرف کی **ترتیب صعودی** یا **نزولی** پہ مرتب کیا جائے۔

مثال اول: $3ع^3+7-5ع^2$؛ $2ع^2-8-9ع$؛ $4ع-2ع^3+3ع^2$ کو جمع کرو۔

$7+ \quad ع^2 5 - ع^3 3$

$8 - ع9 - ع^2 2$

$ع4 + ع^2 3 + ع^3 2 -$

$1 - ع5 - \quad ع^3$

یہ نتیجہ ع کی قدر کی ترتیب نزولی پہ ہے۔

مثال دوم: $3عب^2-2ب^3+ع^3$؛ $5ع^2ب-عب^2-3ع^3$؛ $8ع^3+5ب^3$؛ $9ع^2ب-2ع^3+عب^2$ کو جمع کرو۔

$ع^3 \quad + \quad ب^2 ع3 \quad + \quad ب^3 2 -$

$ع^3 3 \; - \; ب ع^2 5 \; + \; ب^2 ع \; -$

$ع^3 8 \; + \quad ب^3 5$

$ع^3 2 \; - \; ب ع^2 9 \; + \; ب^2 ع$

$ع^3 4 \; + \; ب ع^2 14 \; + \; ب^2 ع3 \; + \; ب^3 3$

اس مثال میں طالب علم کو غور کرنا چاہیے کہ نتیجہ ب کی قرد کی ترتیب نزولی و ع کی قدر کی ترتیب صعودی میں مذکور ہے۔

باب چہارم: تفریق

26. مفہومِ تفریق حدود متشابہ کے بیان میں گزر چکا ہے، جہاں بعض حدود سلبی تھیں۔ [مضمون 19]

لہذا 5ع-3ع = 2ع

3ع-7ع = -4ع

-3ع-6ع = -9ع

و سقوط چاندوں کے قاعدے کے مطابق [مضمون 22]

3ع-(-8ع) = 3ع+8ع = 11ع

-3ع-(-8ع) = -3ع+8ع = 5ع

27. جس عبارت میں غیر متشابہ حدود ہوں اسے حل کرنے کا قاعدہ درج ذیل امثلہ میں ہے

مثال: 3ع-2ب-ج کو 4ع-3ب+5ج سے مفرّق کرو

نتیجہ تفریق = 4ع-3ب+5ج-(3ع-2ب-ج)

= 4ع-3ب+5ج-3ع+2ب+ج

= 4ع-3ع-3ب+2ب+5ج+ج

= ع-ب+6ج

افضل ہے کہ عبارت کو درج ذیل طریقہ پہ تعبیر کیا جائے، و نچلی صف کی تمام حدود کی علامات تبدیل کر دی جائیں، پھر دونوں کو جمع کیا جائے۔

$$\begin{array}{rrr} 4\text{ع} & -3\text{ب} & +5\text{ج} \\ -3\text{ع} & +2\text{ب} & +\text{ج} \\ \hline \text{ع} & -\text{ب} & +6\text{ج} \end{array}$$

اجتماع ہوا

قاعدہ: جس عبارت کی تفریق کرنا ہے اس کی ہر حد کی علامت کو تبدیل کرو، و پھر دوسری عبارت کے ساتھ جمع کرو۔

توضیح: یہ ضروری نہیں ہے کہ عبارتِ مفرّق میں علامت کو حقیقتاً تبدیل کیا جائے، بلکہ اسے ذہن میں بھی کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: $5\text{س}^2+\text{سف}-3\text{ف}^2$ میں سے $2\text{س}^2+8\text{سف}-7\text{ف}^2$ نکالو

$$\begin{array}{rrr} 5\text{س}^2 & +\text{سف} & -3\text{ف}^2 \\ 2\text{س}^2 & +8\text{سف} & -7\text{ف}^2 \\ \hline 3\text{س}^2 & -7\text{سف} & +4\text{ف}^2 \end{array}$$

مثال دوم: $2\text{س}^4-3\text{س}^2+7\text{س}-8$ میں سے $\text{س}^4-2\text{س}^3-9\text{س}+4$ کو کم کرو

$$\begin{array}{rrrrr} \text{س}^4 & -2\text{س}^3 & & -9\text{س} & +4 \\ 2\text{س}^4 & & -3\text{س}^2 & +7\text{س} & -8 \\ \hline -\text{س}^4 & -2\text{س}^3 & +3\text{س}^2 & -16\text{س} & +12 \end{array}$$

28. ہم اس باب کو جمع و تفریق کی تمارین سے ختم کریں گے (مترجم نے اختصاراً اس کتاب میں کہیں بھی تمارین کا ترجمہ نہیں کیا ہے۔)

باب پانچواں: ضرب

29.   جب حروف و عبارات کے درمیان کوئی علامت نہ ہو تو اس کا مطلب ہے کہ انہیں **ضرب** دینا ہے۔

لہذا   عبـ = ع×بـ

و   3عبـ = 3×ع×بـ

و   ع(س-ف) = ع×(س-ف)

و   (س+ف)(ع+بـ) حاصل ضرب ہے س+ف و ع+بـ کا

حسابِ اساسی کے مثل حساب جبر میں بھی حاصل ضرب یکساں ہوتا ہے خواہ اجزاء ضربی کی ترتیب کچھ بھی ہو، یعنی وہ اجزاء کی ترتیب سے مستغنی ہوتا ہے۔ [مضمون 13]

مثال: 2ع×3بـ = 2×ع×3×بـ

= 2×3×ع×بـ

= 6عبـ

30.   چونکہ ع^3 = ععع

و ع^5 = ععععع

تو $\text{ع}^3 \times \text{ع}^5 = \text{عععععععع} = \text{ع}^8$

تو $5\text{ع}^2 \times 7\text{ع}^3 = 5\times 7\ \text{ععععع} = 35\text{ع}^5$

31. جب عملِ ضرب کے معمولات میں، مختلف حروف اقدار کے ساتھ ہوں تب بھی وہی قاعدہ مستعمل ہے۔

مثال: $5\text{ع}^3\text{ب}^2 \times 8\text{ع}^2\text{بس}^3 = 5\text{عععبب} \times 8\text{ععبسس} = 40\text{ع}^5\text{ب}^3\text{س}^3$

تنبیہ: مبتدی کو جاننا چاہیے کہ عمل ضرب میں ایک حرف کی قدر کسی بھی طرح دوسرے حرف کی قدر سے نہیں جوڑی جا سکتی۔ لہذا عبارت $40\text{ع}^5\text{ب}^3\text{س}$ کو مزید بسیط نہیں کیا جا سکتا۔

32. اب ہم ضرب کا عام قاعدہ وضع کر سکتے ہیں۔

قاعدہ: ایک عبارت بسیط کو دوسری میں ضرب دینے کے لیے، ان کے ضریب رقمی کو ضرب کرو، و یکساں حروف کی اقدار کو ایک ساتھ جمع کو۔
یہ قاعدہ اس صورت حال میں بھی جاری ہوگا جہاں دو سے زیادہ عبارات کو ضرب کرنا ہو۔

مثال اول: $\text{س}^2 \times \text{س}^3 \times \text{س}^8 = \text{س}^{3+2} \times \text{س}^8$

$= \text{س}^{8+3+2} = \text{س}^{13}$

مثال دوم: 5س^{2}ف^{3}×8ف^{2}خ^{5}×3سخ^{4} = 120س^{3}ف^{5}خ^{9}

تنبیہ: تین یا زیادہ عبارات کے حاصل ضرب کو **حاصل ضرب استمراری** کہا جاتا ہے۔

33. نقوش 4م کا معنی ہے 4 مرتبہ م کا اجتماع یعنی م+م+م+م

تو 10م = م+م+م+......... دس تک۔

ایسے ہی عم = م+م+م+......... اس میں م کی تعداد ع ہوگی۔

و (ع+ب)م = م+م+م+.........(ع+ب) تک

= (م+م+م+.........ع مربتہ)

و (م+م+م+.........ب مرتبہ)

= عم+بم ....(1)

و (ع-ب)م = م+م+م+......... (ع-ب) تک

= م+م+م+.........ع مرتبہ

و م+م+م+.........ب مرتبہ

= عم-بم ....(2)

ایسے ہی (ع-ب+ج)م = عم-بم+جم

34. **قاعدہ:** کسی عبارتِ مرکب کو ایک جز ضربی سے ضرب دینے کے لیے عبارت کی ہر حد کو اس سے جدا جدا ضرب دیتے ہیں۔

مثالیں:

1. 3(2ع+3ب-4ج) = 6ع+9ب-12ج
2. $(4س^2-7ف-8ھ^3)\times 3سف^2 = 12س^3ف^2-21سف^3-24سف^2ھ^3$
3. $\left(\frac{2}{3}ع - \frac{1}{6}ب - ج\right)\times\frac{3}{8}عب^2 = \frac{1}{4}ع^2ب^2-\frac{1}{16}عب^3-\frac{3}{8}عب^2ج$

35. اگر ہم مضمون 33 کے (1) میں ھ کو ج+د سے بدل دیں تو ہوگا

(ع+ب)(ج+د) = ع(ج+د)+ب(ج+د)

= (ج+د)ع+(ج+د)ب

= عج+عب+بج+بد ....(3)

ایسے ہی (2) میں ہوگا

(ع-ب)(ج+د) = ع(ج+د)-ب(ج+د)

= (ج+د)ع-(ج+د)ب

= عج+عد-(بج+بد)

= عج+عد-بج-بد ....(4)

ایسے ہی (1) میں ھ کو جِ-د سے بدل دیں تو

(ع+بـ)(جِ-د) = ع(جِ-د)+بـ(جِ-د)

= (جِ-د)ع+(جِ-د)بـ

= عجِ-عد+بجِ-بـد ....(5)

ایسی ہی (2) میں

(ع-بـ)(جِ-د) = ع(جِ-د)-بـ(جِ-د)

= (جِ-د)ع-(جِ-د)بـ

= عجِ-عد-بـجِ+بـد ....(6)

یہ نتائج بہت اہم ہیں۔

اگر ہم عبارت (6) کے بائیں جانب والی ہر حد میں و اس کے ثابت ہونے کے طریقے میں غور کریں تو پائیں گے کہ

+ع × +جِ = +عجِ

-بـ × -د = +بـد

-بـ × +جِ = -بـجِ

+ع × -د = -عبـ

ان نتائج سے ضرب کے **قاعدۂ علامات** کے بارے میں معلوم ہوتا ہے۔

قاعدۂ علامات: دو یکساں علامات والی حدود کا حاصل ضرب ہمیشہ ایجابی ہوگا۔ و دو مختلف علامات والی حدود کا حاصل ضرب ہمیشہ سلبی ہوگا۔

36. قاعدۂ علامات، خصوصاً سلبی ضریب کے استعمال میں، مبتدی کے لیے کچھ مشکل ہو سکتا ہے، لہذا درج ذیل مثالیں سلبی حد کے ضرب کے معنی کی تفہیم کے لیے مفید ہیں۔

-3 × +4 = -3 × 4

= -3 کو 4 مرتبہ جمع کرو

= -3-3-3-3

= -12

+3 × -4 کا معنی ہوا کہ +3 کو -4 مرتبہ جمع کیا گیا، گر چہ یہ ابھی بے معنی ہے، لیکن ہم اس کا ایک معقول ترجمہ کر سکتے ہیں، جو موافق ہو اس کے جو پہلے گزرا۔ ہم +4 و -4 کے درمیان اس افتراض سے فرق بیان کرتے ہیں کہ +4 سے چار وحدت کی خط مراد ہے ایک جانب میں، و -4 سے بھی چار وحدت کی خط مراد ہے لیکن پہلی کے خلاف جانب میں۔ تو + و - میں سے ہر ایک دوسرے کے اعتبار سے اس کے خلاف جانب پہ دلالت کرتا ہے۔ لہذا 3 × -4 سے مراد ہوگا کہ 3 کو 4 مرتبہ جمع کیا، و خط کا وہ جانب جس پہ نتیجہ واقع ہوا جانبِ + کے خلاف ہے۔

و 3 کو 4 مرتبہ جمع کرنے کا نتیجہ +12 ہوا۔ و علامت کو، جو جانب خلاف پہ دلیل ہے، تبدیل کر کے ہم نے پایا -12۔

لہذا 3 × -4 = -12۔

ایسے ہی -3 × -4 = 12 دلیل ہے کہ -3 کو 4 مرتبہ جمع کیا، پھر علامت کو تبدیل کیا، پہلا عمل -12 نتیجہ دے گا، و دوسرا اس کو +12 بنا دے گا۔

تو ہوا -3 × -4 = +12

37. یہاں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی جدید علامت یا عمل کے لیے جو بھی معنی ہم چاہیں وضع کر سکتے ہیں، بشرط کہ ہمیشہ اسی معنی کو استعمال کرنا ہوگا، و یہ کہ وہ معنی ہمارے موضوع کے اساسی اصول کے ساتھ تناقض نہ کرے۔

سلبی مقدار میں عمل ضرب کرنا ایک اہم مسئلہ ہے، و اس میں بھی ضرب کا وہی معنی ہوگا جو تب ہوتا ہے جب مضروب و مضروب فیہ ایجابی ہوتے ہیں، پھر حاصل ضرب میں علامت تبدیل کر دی جائے گی۔

38. مبتدی کو اصول مذکور سے مانوس کرانے کے لیے ہم یہاں چند مثالیں بیان کر رہے ہیں، جس میں بعض حروف سلبی مقادیر پہ دال ہیں۔

مثال اول: اگر ع = -4، ع^{3} = (-4)^{3} = -4×-4×-4 = -64

مثال دوم: اگر ع = -1، ب = 3 ، ج = -2 تو -3ع^{4}ب ج^{3} کی قیمت نکالو

-3ع^{4}ب ج^{3} = -3×(-1)^{4}×3×(-2)^{3}

= -3×1×3×-8

= 72

39. درج ذیل مثالوں سے علامات و اقدار کے قواعد کی مزید توضیح ہو جاتی ہے۔

مثال اول: 4ع^{2}ب × -3ع^{4}ب^{2} = -12ع^{6}ب^{3}

مثال دوم: -5عب^{3} × -عب^{3} = 5ع^{2}ب^{6}

مثال سوم: 3ع^{2}ب ، -2ع^{3}ب^{2}، -عب^{4} کا حاصل ضرب استمراری نکالو۔

∴ 3ع^{2}ب×-2ع^{3}ب^{2} = -6ع^{5}ب^{3}

∴ -6ع^{5}ب^{3}×-عب^{4} = 6ع^{6}ب^{7}

مثال چہارم: (6ع^{3}-5ع^{2}ب-4عب^{2})×-3عب^{3}

= -18ع^{4}ب^{3}+15ع^{3}ب^{4}+12ع^{2}ب^{5}

40. اب ایک عبارت مرکب کو دوسری میں ضرب کرنے کا کامل قاعدہ وضع کیا جا سکتا ہے۔

قاعدہ: پہلی عبارت کی ہر حد کو دوسری کی ہر حد میں ضرب دو، و جب ایک حد کو دوسری میں ضرب دو تو اگر علامات یکساں ہوں تو ان کے حاصل ضرب سے قبل + زائد کرو، و اگر مختلف ہوں تو - زائد کرو۔

مثال اول: ضرب دو $\text{ع}+8$ کو $\text{ع}+7$ میں

حاصل ضرب $= (\text{ع}+8)\times(\text{ع}+7)$

$= \text{ع}^2+8\text{ع}+7\text{ع}+56$

$= \text{ع}^2+15\text{ع}+56$

یہ مسئلہ مزید سہولت کے لیے درج ذیل طور پہ حل کیا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{array}{rrr}
 & \text{ع} & +\ 8 \\
 & \text{ع} & +\ 7 \\
\hline
\text{ع}^2 & +\ 8\text{ع} & \\
 & +\ 7\text{ع} & +\ 56 \\
\hline
\text{ع}^2 & +\ 15\text{ع} & +\ 56
\end{array}
$$

اجتماع ہوا $\text{ع}^2+15\text{ع}+56$

توضیح: ہم نے مسئلہ حل کرنا داہنے سے شروع کیا ہے و بائیں جانب گئے ہیں، و دوسرا حاصل ضرب ایک مقام کے بعد سے لکھا ہے، تاکہ حدود متشابہ ایک عمود میں قائم ہو سکیں۔

مثال دوم: $2س-3ف$ کو $4س-7ف$ میں ضرب دو

$$2س - 3ف$$
$$4س - 7ف$$
$$8س^2 - 12سف$$
$$- 14سف + 21ف^2$$

اجتماع ہوا $8س^2 - 26سف + 21ف^2$

41. جب وہ عبارات جو معمولِ ضرب ہیں، دو سے زیادہ حدود کو متضمن ہوں، تب بھی یہی طریقہ مستعمل ہے۔

مثال: $2ع^2-3عب+4ب^2$ و $-5ع^2+3عب+4ب^2$ کا حاصل ضرب نکالو

$$2ع^2 - 3عب + 4ب^2$$
$$-5ع^2 + 3عب + 4ب^2$$
$$-10ع^4 + 15ع^3ب - 20ع^2ب^2$$
$$+ 6ع^3ب - 9ع^2ب^2 + 12عب^3$$
$$+ 8ع^2ب^2 - 12عب^3 + 16ب^4$$
$$-10ع^4 + 21ع^3ب - 21ع^2ب^2 + 16ب^4$$

42. اگر عباراتِ مضروب و مضروب فیہ کسی حرفِ عام کی ترتیب صعودی یا نزولی میں مرتب نہ ہوں، تو انہیں مرتب کر لینا چاہیے۔

مثال: 2س^2 + سف + 2سj - 3فj - j^2 میں س - ف + 2j کو ضرب دو

2س^2 + سف + 2سj - 3فj - j^2
س - ف + 2j

2س^3 + س^{2}ف + 2س^{2}j - 3سفj - سj^2
- 2س^{2}ف - 2سفj - سف^2 + 3ف^{2}j + فj^2
4س^{2}j + 2سفj + 4سj^2 - 6فj^2 - 2j^3

2س^3 - س^{2}ف + 6س^{2}j - 3سفj + 3سj^2 - سف^2 + 3ف^{2}j - 5فj^2 - 2j^3

43. جب ضریب عددی مکسور ہوں تو بھی ہم ضرب کا قاعدہ استعمال کریں گے ضریب مکسور کو حساب اساسی کے قاعدہ سے مرکب کرتے ہوئے۔

مثال: $\frac{1}{3}$ع^2 − $\frac{1}{2}$عب + $\frac{2}{3}$ب^2 میں $\frac{1}{2}$ع + $\frac{1}{3}$ب کو ضرب دو۔

$\frac{1}{3}$ع^2 − $\frac{1}{2}$عب + $\frac{2}{3}$ب^2
$\frac{1}{2}$ع + $\frac{1}{3}$ب

$\frac{1}{6}$ع^3 − $\frac{1}{4}$ع^{2}ب + $\frac{1}{3}$عب^2
$\frac{1}{9}$ع^{2}ب − $\frac{1}{6}$عب^2 + $\frac{2}{9}$ب^3

$\frac{1}{6}$ع^3 − $\frac{5}{36}$ع^{2}ب + $\frac{1}{6}$عب^2 + $\frac{2}{9}$ب^3

44. با وجود اس کے کہ دو حدّی عبارت جیسے ع+8 و ع+7، کے ضرب کا نتیجہ قاعدۂ مذکور سے حاصل کیا جا سکتا ہے، طالب علم کو خالص ملاحظہ کر کے نتیجہ نکالنا سیکھ لینا چاہیے۔

و اس کا طریقہ اس بات میں غور کرنا ہے کہ نتیجہ میں موجود حدود کے ضریب کیسے ثابت ہوئے ہیں، و اس بات میں کہ وہ نتیجہ ہیں ان دو عبارات کی حدود کی ترکیب کا جن میں سے ایک کو دوسری میں ضرب دیا گیا ہے۔

لہذا $(\text{ع}+8)(\text{ع}+7) = \text{ع}^2+8\text{ع}+7\text{ع}+56$

$= \text{ع}^2+15\text{ع}+56$

$(\text{ع}-8)(\text{ع}-7) = \text{ع}^2-8\text{ع}-7\text{ع}+56$

$= \text{ع}^2-15\text{س}+56$

$(\text{ع}+8)(\text{ع}-7) = \text{ع}^2+8\text{ع}-7\text{ع}-56$

$= \text{ع}^2+\text{ع}-56$

$(\text{ع}-8)(\text{ع}+7) = \text{ع}^2-8\text{ع}+7\text{ع}-56$

$= \text{ع}^2-\text{ع}-56$

مذکورہ تمام نتایج میں ہم ملاحظہ کر سکتے ہیں کہ

1. نتیجہ تین حدود کو متضمن ہے۔
2. نتیجہ کی پہلی حد دونوں دو حدی عبارات کی پہلی حدود کا حاصل ضرب ہے۔

3. نتیجہ کی تیسری حد دونوں دو حدی عبارات کی دوسری حدود کا حاصل ضرب ہے۔
4. درمیانی حد دونوں عبارات کی مختلف حدود کے حاصل ضرب کا اجتماع ہے۔

بہر حال ان میں درمیانہ قدم حذف کر کے سیدھے حاصل ضرب لکھا جا سکتا ہے جیسے درج ذیل ہے

$$(ع+2)(ع+3) = ع^2+5ع+6$$

$$(ع-3)(ع+4) = ع^2+ع-12$$

$$(ع+6)(ع-9) = ع^2-3ع-54$$

$$(ع-4ب)(ع-10ب) = ع^2-14عب+40ب^2$$

$$(ع-6ب)(ع+4ب) = ع^2-2عب-24ب^2$$

ان اصول سے ہم کسی بھی دو حدی عبارت کو دفعتاً ضرب کر سکتے ہیں۔

لہذا $(2ع+3ب)(ع-ب) = 2ع^2+3عب-2عب-3ب^2$

$$= 2ع^2+عب-3ب^2$$

$$(3ع-4ب)(2ع+ب) = 6ع^2-8عب+3عب-4ب^2$$

$$= 6ع^2-5عب-4ب^2$$

45. یہ مثالیں کافی ہیں، لیکن دو ایسی صورت حال ہیں کہ جن پہ طالب علم کی توجہ دلانا ضروری ہے، و ان کا کامل بیان آگے آئے گا۔

حالت اول: $(\text{ع}+4)(\text{ع}-4) = \text{ع}^2+4\text{ع}-4\text{ع}-16$

$= \text{ع}^2-16$

$(2\text{ع}+5\text{ب})(2\text{ع}-5\text{ب}) = 4\text{ع}^2+10\text{عب}-10\text{عب}-25\text{ب}^2$

$= 4\text{ع}^2-25\text{ب}^2$

حالت دوم: $(\text{ع}+3)^2 = (\text{ع}+3)(\text{ع}+3)$

$= \text{ع}^2+6\text{ع}+9$

$(3\text{ع}-4\text{ب})^2 = (3\text{ع}-4\text{ب})(3\text{ع}-4\text{ب})$

$= 9\text{ع}^2-12\text{عب}-12\text{عب}+16\text{ب}^2$

$= 9\text{ع}^2-24\text{عب}+16\text{ب}^2$

باب چھٹواں: تقسیم

46. **تقسیم** کی غرض اس مقدار کو حاصل کرنا ہے جسے **حاصل تقسیم** کہتے ہیں جس میں اگر **مقسوم بہ** کو ضرب دیا جائے تو **مقسوم** آتا ہے۔ تو تقسیم ضرب کا عکس ہوا۔

و عبارت مذکور اختصارا درج ذیل طور پہ تعبیر کی جا سکتی ہے

حاصل تقسیم × مقسوم بہ = مقسوم

مقسوم ÷ مقسوم بہ = حاصل تقسیم

و اسے مکسور کی صورت میں بھی تعبیر کیا جاتا ہے

$$\frac{\text{مقسوم}}{\text{مقسوم بہ}} = \text{حاصل تقسیم}$$

مثال اول: جونکہ 4 و ع کا حاصل ضرب 4ع ہوتا ہے، لہذا اگر 4ع کو ع سے تقسیم کر دیا جائے تو 4 آئے گا، یا 4ع÷ع = 4 ۔

مثال دوم: $27\text{ع}^5 \div 9\text{ع}^3 = \frac{27\text{ع}^5}{9\text{ع}^3} = \frac{27\text{ععععع}}{9\text{ععع}} = 3\text{عع}$ ، مقسوم و مقسوم بہ سے جز ضربی مشترک ساقط کر کے۔

لہذا $27\text{ع}^5 \div 9\text{ع}^3 = 3\text{ع}^2$

مثال سوم: $35\text{ع}^3\text{ب}^2\text{ج}^3 \div 7\text{ع}\text{ب}^2\text{ج}^2 = \frac{35\text{ععع}\text{بب}\text{ججج}}{7\text{ع}\text{بب}\text{جج}} = 5\text{ع}^2\text{ج}$

47. **قاعدہ:** ایک عبارتِ بسیط کو دوسری عبارت بسیط سے تقسیم کرنے کے لیے، مقسوم کے ضریبِ رقمی کو مقسوم بہ کے ضریب رقمی سے تقسیم کرو، و مقسوم کے حرف کی قدر سے مقسوم بہ کے اسی حرف کی قدر کو مفرق کرو۔

مثال جہارم: $84ع^5س^3 \div 12ع^4س = 7ع^{5-4}س^{3-1}$

$= 7عس^2$

مثال پنجم: $77ع^2س^3ف^4 \div 7عس^2ف = 11عسف^3$

توضیح: اگر ہم کسی حرف بقدر کو اسی حرف بقدر سے تقسیم کرنے کے لیے یہ قاعدہ جاری کریں تو ایک دل چسپ نتیجہ سامنے آتا ہے۔

یعنی قاعدے کے مطابق $ع^3 \div ع^3 = \frac{ع^3}{ع^3} = ع^{3-3} = ع^0$

لیکن $ع^3 \div ع^3 = \frac{ع^3}{ع^3} = 1$

لہذا $ع^0 = 1$

یہ نتیجہ مبتدی کے لیے کچھ عجیب ہو سکتا ہے، لیکن اس کا مزید بیان بابِ تیسویں میں آئے گا۔

48. اب یہ ثابت کرنا کچھ مشکل نہیں ہے کہ قواعدِ علامات تقسیم میں بھی جاری ہوتے ہیں۔

لہذا $\text{عب} \div \text{ع} = \frac{\text{عب}}{\text{ع}} = \frac{\text{ع} \times \text{ب}}{\text{ع}} = \text{ب}$

$-\text{عب} \div \text{ع} = \frac{-\text{عب}}{\text{ع}} = \frac{\text{ع} \times -\text{ب}}{\text{ع}} = -\text{ب}$

$\text{عب} \div -\text{ع} = \frac{\text{عب}}{-\text{ع}} = \frac{-\text{ع} \times -\text{ب}}{-\text{ع}} = -\text{ب}$

$-\text{عب} \div -\text{ع} = \frac{-\text{عب}}{-\text{ع}} = \frac{-\text{ع} \times \text{ب}}{-\text{ع}} = \text{ب}$

لہذا ضرب کی طرح تقسیم میں بھی متشابہ علامات + کو لازم کریں گی و غیر متشابہ علامات - کو لازم کریں گی۔

مثال اول: 6عب÷2ع = 3ب

دوم: -15سف\3س = -5ف

سوم: -21ع²ب³\-7ع²ب² = 3ب

چہارم: 45ع^{6}ب^{2}س^{4} \ -9ع^{3}بس^{2} = -5ع^{3}بس^{2}

پنجم: - $\frac{4}{9}$ ع^{4}ب^{5}ج^{3} ÷ $\frac{8}{2}$ ع^{3}ب^{3}ج^{3} = - $\frac{1}{9}$ عب^{2}

49. **قاعدہ:** عبارت مرکب کو ایک جز ضربی سے تقسیم کرنے کے لیے، اس کی تمام حدود کو اس جز سے تقسیم کرتے ہیں۔

مثال اول: (9س-12ف+3د) ÷ -3 = -3س+4ف-د

دوم: (36ع^{3}ب^{2}-24ع^{2}ب^{5}-20ع^{4}ب^{2}) ÷ 4ع^{2}ب = 9عب-6ب^{4}-5ع^{2}ب

سوم: (2س^{2}-5سف+ $\frac{3}{2}$ س^{2}ف^{3}) ÷ - $\frac{1}{2}$ س = -4س+10ف-3سف^{3}

50. ایک عبارتِ مرکب کو دوسری عبارتِ مرکب سے تقسیم کرنے کا **قاعدہ**

اول: مقسوم بہ و مقسوم کو کسی حرف مشترک کی قدر کے اعتبار سے صعوداً یا نزولاً مرتب کرو۔

دوم: مقسوم بہ کی داہنی حد سے مقسوم کی داہنی حد کو تقسیم کرو، و نتیجہ آئے اسے حاصل تقسیم میں تحریر کرو۔

سوم: پھر جو نتیجہ آیا اس کو کل مقسوم بہ میں ضرب دو و حاصل ضرب کو مقسوم کے نیچے لکھو۔

چہارم: پھر تفریق کرو، و عبارتِ مقسوم میں سے جتنے ضروری ہوں، وہ تمام حدود نیچہ منتقل کرو۔

و ان اقدام کو تب تک دوہراتے رہو جب تک مقسوم کی تمام حدود ختم نہ ہو جائیں۔

مثال اول: $\text{س}^2+11\text{س}+30$ کو س+6 سے تقسیم کرو

مسئلہ کو ترتیب دو $\quad \text{س}+6 \overline{\big)\, \text{س}^2+11\text{س}+30}$

مقسوم کی پہلی حد یعنی س^2 کو مقسوم بہ کی پہلی حد یعنی س سے تقسیم کرو، تو اس کا حاصل تقسیم س آئے گا، پھر کل مقسوم بہ کو س میں ضرب دو و اس کے حاصل ضرب یعنی $\text{س}^2+6\text{س}$ کو مقسوم کے تحت رکھو۔

تو ہوگا

$$\begin{array}{r} \text{س} \\ \text{س}+6 \overline{\big)\, \text{س}^2+11\text{س}+30} \\ \underline{\text{س}^2+6\text{س}} \\ 5\text{س}+30 \end{array}$$

نتیجۂ تفریق

مذکورہ بالا قاعدہ دوہرانے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ حاصل تقسیم کی اگلی حد +5 ہے۔

خیر، پورا عمل اس طرح تعبیر کیا جائے گا

$$\begin{array}{r} \text{س}+5 \\ \text{س}+6 \overline{\big)\, \text{س}^2+11\text{س}+30} \\ \underline{\text{س}^2+6\text{س}} \\ 5\text{س}+30 \\ \underline{5\text{س}+30} \end{array}$$

و اس قاعدہ کی بنیاد یہ ہے کہ مقسوم کو متعدد مناسب حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے، و تمام جزئی حواصل تقسیم کا اجتماع کل حاصلِ تقسیم ہوتا ہے۔

لہذا س^{2}+11س+30 قاعدۂ مذکور سے دو حصوں میں تقسیم ہوا، ایک س^{2}+6س و دوسرا 5س+30۔ پھر ان دونوں میں سے ہر ایک س+6 سے تقسیم ہوا، تو ہمیں کامل حاصل تقسیم س+5 حاصل ہوا۔

مثال دوم: 24س^{2}-65سف+21ف^{2} کو 8س-3ف سے تقسیم کرو

3س-7ف

8س-3ف) 24س^{2}-65سف+21ف^{2}

24س^{2}-9سف

-56سف +21ف^{2}

-56سف +21ف^{2}

51. مذکورہ مثالوں میں مقسوم بہ کامل طور پہ مقسوم میں شامل ہے، لیکن مبتدی کو ایسے مسئلہ سے بھی واقف ہونا چاہیے جس میں بقیہ کی معین قیمت مطلوب ہو۔

مثال: س^{4}-7س^{3}+9س^{2}-11س+15 کو س-5 سے تقسیم کرو

س^{3} -2س^{2} -س -16

س-5) س^{4} -7س^{3} +9س^{2} -11س +15

س^{4} -5س^{3}

-2س^{3} +9س^{2}

-2س^{3} +10س^{2}

-س^{2} -11س

-س^{2} +5س

-16س +15

-16س +80

-65

و بقیہ ہے -65۔

52. یہاں ہم چند مشکل مسائل بیان کر رہے ہیں۔

مثال اول: س^{4}+4ع^{4} کو س^{2}+2س^{2}+ع^{2} سے تقسیم کرو

س^{2} -2سع +2ع^{2}

س^{2} +2سع +2ع^{2}) س^{4} +4ع^{4}

س^{4} +2س^{3}ع +2س^{2}ع^{2}

-2س^{3}ع -2س^{2}ع^{2}

-2س^{3}ع -4س^{2}ع^{2} -4سع^{3}

2س^{2}ع^{2} +4سع^{3} +4ع^{4}

2س^{2}ع^{2} +4سع^{3} +4ع^{4}

مثال دوم: ع^{3}+بـ^{3}+جـ^{3}-3عبـجـ کو ع+بـ+جـ سے تقسیم کرو

ع^{2} -عب -عج +ب^{2} -بج +ج^{2}

ع +ب +ج) ع^{3} -3عبج +ب^{3} +ج^{3}

ع^{3} +ع^{2}ب +ع^{2}ج

-ع^{2}ب -ع^{2}ج -3عبج

-ع^{2}ب -عب^{2} -عبج

-ع^{2}ج +عب^{2} -2عبج

-ع^{2}ج -عبج -عج^{2}

عب^{2} -عبج +عج^{2} +ب^{3}

عب^{2} +ب^{3} +ب^{2}ج

-عبج +عج^{2} -ب^{2}ج

-عبج -ب^{2}ج -بج^{2}

عج^{2} +بج^{2} +ج^{3}

عج^{2} +بج^{2} +ج^{3}

توضیح: مثال مذکور میں مقسوم و بقیات یک بعد دیگر ع کی ترتیب نزولی پہ مرتب ہیں۔

و اس تقسیم کا نتیجہ بہت اہم ہے جس کا بیان آگے آئے گا، و بعد میں اس کا حوالہ دیا جائے گا۔

53. کبھی عبارت کو ترتیب صعودی پہ مرتب کرنا بہتر ہوتا ہے۔

مثال: 10-16ع-39ع^{2}+2ع^{3}+15ع^{4} کو 2-4ع-5ع^{2} سے تقسیم کرو

5 +2ع -3ع^{2}

2 -4ع -5ع^{2}) 10 -16ع -39ع^{2} +2ع^{3} +15ع^{4}

10 -20ع -25ع^{2}

4ع -14ع^{2} +2ع^{3}

4ع -8ع^{2} -10ع^{3}

-6ع^{2} +12ع^{3} +15ع^{4}

-6ع^{2} +12ع^{3} +15ع^{4}

54. جب ضریب مکسور ہوں تب بھی یہی قاعدہ مستعمل ہے۔

مثال: $\frac{1}{4}\text{س}^3 + \frac{1}{72}\text{سف}^2 + \frac{1}{12}\text{ف}^3$ کو $\frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{3}\text{ف}$ سے تقسیم کرو

$$\frac{1}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{سف} + \frac{1}{4}\text{ف}^2$$

$$\frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{3}\text{ف} \;\Big)\; \frac{1}{4}\text{س}^3 + \frac{1}{72}\text{سف}^2 + \frac{1}{12}\text{ف}^3$$

$$\frac{1}{4}\text{س}^3 + \frac{1}{6}\text{س}^2\text{ف}$$

$$-\frac{1}{6}\text{س}^2\text{ف} + \frac{1}{72}\text{سف}^2$$

$$-\frac{1}{6}\text{س}^2\text{ف} - \frac{1}{9}\text{سف}^2$$

$$\frac{1}{8}\text{سف}^2 + \frac{1}{12}\text{ف}^3$$

$$\frac{1}{8}\text{سف}^2 + \frac{1}{12}\text{ف}^3$$

55. تقسیم کے درج ذیل مسائل کی بسہولت تحقیق کی جا سکتی ہے، و یہ بہت اہم مسائل ہیں لہذا بغور سمجھنا چاہیے۔

$$\frac{س^2-ف^2}{س-ف} = س+ف$$

$$\frac{س^3-ف^3}{س-ف} = س^2+سف+ف^2$$

$$\frac{س^4-ف^4}{س-ف} = س^3+س^2ف+سف^2+ف^3$$

و ایسے ہی آگے بھی جاری رہے گا، یعنی مقسوم بہ $س-ف$ ہوگا، حاصل تقسیم کے تمام حدود ایجابی ہوں گی، و مقسوم کی اقدار یا تو تاق ہوں گی یا جفت۔

$$\frac{س^3+ف^3}{س+ف} = س^2-سف+ف^2$$

$$\frac{س^5+ف^5}{س+ف} = س^4-س^3ف+س^2ف^2-سف^3+ف^4$$

$$\frac{س^7+ف^7}{س+ف} = س^6-س^5ف+س^4ف^2-س^3ف^3+س^2ف^4-سف^5+ف^6$$

و ایسے ہی آگے بھی، یعنی مقسوم بہ $س+ف$ ہوگا و حاصل تقسیم کی حدود یک بعد دیگر ایجابی و سلبی ہوں گی؛ و مقسوم کی اقدار ہمیشہ تاق ہوں گی۔

$$\frac{س^2-ف^2}{س+ف} = س-ف$$

$$\frac{س^4-ف^4}{س+ف} = س^3-س^2ف+سف^2-ف^3$$

$$\frac{س^6-ف^6}{س+ف} = س^5-س^4ف+س^3ف^2-س^2ف^3+سف^4-ف^5$$

و ایسے ہی آگے بھی، یعنی مقسوم بہ $س+ف$ ہوگا، حاصل تقسیم کی حدود یک بعد دیگر ایجابی و سلبی ہوں گی، و مقسوم کی اقدار ہمیشہ جفت ہوں گی۔

عبارات $س^2+ف^2$، $س^4+ف^4$، $س^6+ف^6$... (جب کہ اقدار جفت ہوں، و حدود دونوں ایجابی ہوں) تو وہ کبھی بھی $س+ف$ یا $س-ف$ سے تقسیم نہیں ہوں گی۔

یہ تمام صورت حال مختصراً درج ذیل ہیں

1. $س^ط-ف^ط$ ، $س-ف$ سے تقسیم ہوگا ہے، جب ط عدد طبیعی ہو
2. $س^ط+ف^ط$ ، $س+ف$ سے تقسیم ہوگا ہے، جب ط تاق عدد طبیعی ہو
3. $س^ط-ف^ط$ ، $س+ف$ سے تقسیم ہوگا ہے، جب ط جفت عدد طبیعی ہو
4. $س^ط+ف^ط$ کبھی بھی $س+ف$ یا $س-ف$ سے تقسیم نہیں ہو سکتا، جب ط جفت عدد طبیعی ہو۔

باب ساتواں: سقوط و دخول چاندہ

56. کبھی ہمارے لیے عبارت کے اس جز کو چاندوں میں قید کرنا لازم ہوتا ہے جو پہلے سے چاندوں میں ہے۔ اس کے لیے مختلف اشکال کے چاندے استعمال کیے جاتے ہیں، عام طور پہ ( ), { }، [ ]۔ کبھی نقوش کے اوپر ایک خط کھینچ دی جاتی ہے، جسے ہم **خط بلند** کہیں گے۔ لہذ ع-$\overline{ب+ج}$ کا معنی وہی ہے جو ع-(ب+ج) کا ہے، و لہذا ع-$\overline{ب+ج}$ = ع-ب-ج ۔

57. چاندوں کو ساقط کرنے کے لیے افضل ہے کہ داخلی جوڑے سے شروع کیا جائے، و ہر جوڑے کے لیے ہم انہیں قواعد کا اطلاق کریں گے جو مضمون 21 و 22 میں گزرے ہیں۔

مثال اول: چاندے ساقط کر کے درج ذیل عبارت کی تبسیط کرو

ع-2ب-[4ع-6ب-{3ع-ج+(5ع-2ب-3ع+ج-2ب)}]

یک بعد دیگر عبارت حل کر کے ہمیں ملا

= ع-2ب-[4ع-6ب-{3ع-ج+5ع-2ب-3ع+ج-2ب}]

= ع-2ب-[4ع-6ب-3ع+ج-5ع+2ب+3ع-ج+2ب]

= ع-2ب-4ع+6ب+3ع-ج+5ع-2ب-3ع+ج-2ب

= 2ع، حدود متشابہ کو جمع کر کے۔

مثال دوم: عبارت ذیل کی تبسیط کرو

-[-2س-{3ف-(2س-3ف)+(3س-2ف)}+2س]

= -[-2س-{3ف-2س+3ف+3س-2ف}+2س]

= -[-2س-3ف+2س-3ف-3س+2ف+2س]

= 2س+3ف-2س+3ف+3س-2ف-2س]

= س+4ف

58. اگر چاندہ سے قبل کوئی جز ضربی ہے تو اس کا مطلب ہے کہ چاندوں میں موجود ہر حد کو اس میں ضرب دیا جائے گا۔

توضیح: مقسوم و مقسوم بہ کے درمیان جو خط ہوتی ہے وہ خط بلند کی ایک قسم ہے، لہذا $\frac{\text{س-5}}{3}$ متساوی ہے $\frac{1}{3}$ (س-5)۔ و جو خط کے اوپر ہو اس کو ہم **ما فوق** کہیں گے و جو نیچے ہو اس کو **ما تحت**۔

ایسے ہی √(س+ف) جیسی عبارت کو عموماً $\sqrt{\text{س+ف}}$ لکھا جاتا ہے، و خط جو س+ف کے اوپر ہے وہ خط بلند ہے، جو دلیل ہے کہ اس میں عبارت مرکب س+ف کے کل کا جذر مربع مراد ہے۔

لہذا $\sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

جب کہ $\sqrt{144} + \sqrt{25} = 12+5 = 17$

59. بعض اوقات عمل کے دوران تبسیط کرنے کو کہا جاتا ہے۔

مثال: 84-7[-11س-4{-17س+3(8-(9-5س))}] کی قیمت نکالو

= 84-7[-11س-4{-17س+3(8-9+5س)}]

= 84-7[-11س-4{-17س+3(5س-1)}]

= 84-7[-11س-4{-17س+15س-3}]

= 84-7[-11س-4{-2س-3}]

= 84-7[-11س+8س+12]

= 84-7[-3س+12]

= 84+21س-84

= 21س

واضح رہے کہ جب مبتدی کی کچھ مشق ہو جائے تو وہ حل مسائل کے بعض اقدام حذف کر سکتا ہے۔

60. اس کے بر عکس چاندوں کو داخل کرنے کا عمل جاننا بھی ضروری ہے، و اس کے قواعد مضمون 21 و 22 میں بیان کیے جا چکے ہیں، جسے سہولت کے لیے ہم یہاں دوہرا رہے ہیں۔

1. عبارت کا کوئی بھی جز چاندوں میں قید کیا جا سکتا ہے، و اس کے قبل علامت + زیادہ کی جا سکتی، و تب چاندوں کے اندر کی کوئی علامت تبدیل نہ ہوگی گی۔

2. عبارت کا کوئی بھی جز چاندوں میں قید کیا جا سکتا ہے، و اس کے قبل علامت - زیادہ کی جا سکتی ہے، و تب چاندوں کے اندر کی ہر علامت تبدیل ہو جائے گی۔

امثلہ: ع-بـ+جِ-د-س = ع-بـ+(جِ-د-س)

ع-بـ+جِ-د-س = ع-(بـ-جِ)-(د+س)

س^{2}-عس+بـس-عبـ = (س^{2}-عس)+(بـس-عبـ)

سف-عس-بـف+عبـ = (سف-بـف)-(عس-عبـ)

61. عبارت کی حدود کو کئی طرح سے چاندوں میں قید کیا جا سکتا ہے۔

امثلہ: عبارت عس-بـس+جِس-عف+بـف-جِف کو لکھا جا سکتا

(عس-بـس)+(جِس-عف)+(بـف-جِف)

یا (عس-بـس+جِس)-(عف-بـف+جِف)

یا (عس-عف)-(بـس-بـف)+(جِس-جِف)

62. جب کوئی جز ضربی چاندوں کی ہر حد میں مشترک ہو تو اس کو اندر سے نکال کے باہر رکھا جا سکتا ہے و تب وہ چاندوں میں قید کل عبارت کا ضریب بن جائے گا۔

مثال اول: عس^{3}-جِس+7-دس^{2}+بـس-جِ-دس^{3}+بـس^{2}-2س

س کی اقدار کو چاندوں میں ایک ساتھ اس طرح قید کرو کہ ہر چاندہ کے پہلے + آئے۔

تو ہوگا (عس^{3}-دس^{3})+(بـس^{2}-دس^{2})+(بـس-جـس-2س)+(7-جـ)

= س^{3}(ع-د)+س^{2}(بـ-د)+س(بـ-جـ-2)+(7-جـ)

= (ع-د)س^{3}+(بـ-د)س^{2}+(بـ-جـ-2)+7-جـ

آخری سطر میں مرکب عبارات ع-د، بـ-د، بـ-جـ، بـ-جـ-2 ضریب کہے جائیں گے س^{3}، س^{2} و س کے حسب ترتیب۔

مثال دوم: -ع^{2}س-7ع+ع^{2}ف+3-2س-عبـ میں ع کی اقدار کو چاندوں میں قید کرو کہ ہر چاندے کے قبل - آئے۔

تو ہوا -(ع^{2}س-ع^{2}ف)-(7ع+عبـ)-(2س-3)

= -ع^{2}(س-ف)-ع(7+بـ)-(2س-3)

= -(س-ف)ع^{2}-(7+بـ)ع-(2س-3)

63. اُن عبارات کے ضرب و جمع وغیرہ کے بعض مسائل میں، جن میں ضریب حرفی شامل ہوں، کسی مشترک حرف کی قدر کے اعتبار سے حدود کی گروہ بند کر کے نتیجہ کو مزید آسانی سے لکھا جا سکتا ہے۔

مثال اول: عس^{3}-2بـس^{2}+3، بـس-جـس^{3}-س^{2} و س^{3}-عس^{2}+جـس کو جمع کرو

= عس^{3}-2بس^{2}+3 + بس-جس^{3}-س^{2} + س^{3}-عس^{2}+جس

= عس^{3}-جس^{3}+س^{3}-عس^{2}-2بس^{2}-س^{2}+بس+جس+3

= (ع-ج+1)س^{3}-(2ب+ع+1)س^{2}+(ب+ج)س+3

مثال دوم: عس^{2}-2بس+3ج میں خس-ص کو ضرب دو

= (عس^{2}-2بس+3ج) (خس-ص)

= عخس^{3}-2بخس^{2}+3جخس-عصس^{2}+2بصس-3جص

= عخس^{3}-(2بخ+عص)س^{2}+(3جخ+2بص)س-3جص

باب آٹھواں: مساوات

64. **مساوات** دو عبارات کے متساوی ہونے پہ دلالت کرتی ہے، لیکن ہم عام طور پہ مساوات کا لفظ اتنے وسیع معنی میں استعمال نہیں کرتے۔

لہذا عبارت س+3+س+4 = 2س+7 جو ہمیشہ صادق ہوگی چاہے س کی قیمت جو ہو، تو اسے ہم **مساوات عینی** کہیں گے یا خالص **عینی**۔

مساوات کے اجزاء جو علامتِ تساوی کے داہنے و بائیں جانب ہوتے ہیں ان کو جانب مساوات کہا جاتا ہے، و **داہنا جانب** و **بایاں جانب** کہ کے ایک دوسرے سے ممتاز کیا جاتا ہے۔

65. بعض مساوات نقوش کی بعض قیمتوں کے لیے ہی صادق ہوتی ہیں، کہ 3س = 6 خالص تبھی صادق ہوگی جب س = 2، و اس کو **مساوات شرطی** کہتے ہیں، لیکن عموماً صرف **مساوات** کہ کے اکتفاء کیا جاتا ہے۔ و عینی وہ مساوات ہے جو ہمیشہ صادق ہوتی ہے چاہے نقوش کی قیمت کچھ بھی ہو، جب کہ مساوات یعنی مساواتِ شرطی صرف مخصوص قیمتوں پہ ہی صادق ہوتی ہے۔ مثال مذکور 3س = 6 میں کہا جائے گا کہ قیمت 2 نے مساوات کو **تمام** کیا۔ و اس باب کی غایت یہ بیان کرنا ہے کہ مساواتِ بسیط سے وہ قیمت کیسے معلوم کی جائے جو اس کو تمام کرنے والی ہے۔

66. وہ حرف جس کی قیمت حاصل کرنا ہو اس کو **مقدارِ مجھول** کہتے ہیں، و قیمت حاصل کرنے کے عمل کو **حلّ مساوات** کہتے ہیں، و جو قیمت حاصل ہوتی ہے وہ **نتیجہ** کہلاتی ہے۔

67. مساوات کا نتیجہ و وہ اعمال جو اس کے لیے لازم ہیں، علم ریاضی کا بہت اہم جز ہیں۔ مسائلِ ریاضی کی تمام انواع میں بعض ایسی مقدار ہوتی ہیں جو دیگر مقادیر کے جانب نسبت سے ثابت ہوتی ہیں جو معلوم ہوں، و انہیں نسبتوں کو مساوات سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ و ریاضی میں کسی مسئلہ کو حل کرنے کے لیے پہلے مسئلہ کی شرائط کو ایک یا زیادہ مساوات سے تعبیر کرتے ہیں، پھر ان مساوات کو حل کرتے ہیں۔ مثلاً جو مسئلہ مذکورہ مساوات سے تعبیر کیا گیا ہے وہ ایک بہت آسان سوال ہے یعنی "وہ عدد کیا ہے جو اگر 3 سے ضرب دیا جائے تو اس کا نتیجہ 6 آئے؟"

68. مساوات جس میں مقدار مجھول پہلے درجہ کی ہو اس کو **مساوات بسیط** کہتے ہیں۔ و اسے ہم اس کتاب میں عام طور پہ ﷲ سے تعبیر کریں گے۔

69. مساوات بسیط کو حل کرنے کا عمل خالص درج ذیل اصول پہ مبنی ہے
    1. اگر دو متساوی چیزوں میں متساوی جمع کریں تو اجتماعات متساوی ہوں گے۔

2. اگر دو متساوی چیزوں میں سے متساوی تفریق کریں تو بقیات متساوی ہوں گے۔
3. اگر دو متساوی چیزوں میں متساوی کو ضرب دیں تو حواصل ضرب متساوی ہوں گے۔
4. اگر دو متساوی چیزوں کو متساوی سے تقسیم کریں تو حواصل تقسیم متساوی ہوں گے۔

70. فرض کرو کہ 7س = 14

اس میں یہ معلوم کرنا ہے کہ س کی کیا قیمت ہوگی جو اس مساوات کو تمام کرے۔

دونوں جانب کو 7 سے تقسیم کر کے ہم نے پایا کہ

س = 2 ....(اصل 4)

ایسے ہی اگر $\frac{س}{2}$ = -6

دونوں جانب میں 2 کو ضرب دیا تو پایا کہ

س = -12 ....(اصل 3)

ایسے ہی مساوات 7س-2س-س=23+15-10 میں حدود کو جمع کرنے سے ہمیں ملا۔

4س = 28

∴ س = 7

71. 3س-8 = س+12 حل کرنے کے لیے

یہ مسئلہ پہلے والے سے الگ ہے اس طور پہ کہ مقدار مجہول علامت تساوی کے دونوں جانب ہے۔ خیر ہم کسی بھی حد کو ایک جانب سے دوسرے جانب **منتقل** کر سکتے ہیں و تب اس کی علامت بدل جائے گی۔

جب ہم نے علامت تساوی کے دونوں جانب سے س کی تفریق کیا تو پایا کہ

3س-س+8 = 12 ....(اصل 2)

و دونوں جانب 8 جمع کیا تو پایا کہ 3س-س = 12+8 ....(اصل 1)

لہذا +س ایک جانب سے غائب ہو گیا و -س دوسرے جانب حاضر ہو گیا، وایسے ہی -8 ایک جانب سے غائب ہوا و +8 بن کے دوسرے جانب حاضر ہوا۔

ظاہر ہے کہ ایسے ہی اقدام ہر صورت میں ہوں گے لہذا ہم درج ذیل قاعدہ وضع کر سکتے ہیں۔

قاعدہ: عبارت کا کوئی بھی جز، اس کی علامت تبدیل کر کے، ایک جانب سے دوسرے جانب منتقل کیا جا سکتا ہے۔

اس سے معلوم ہوا کہ ہم ایک ساتھ مساوات کی ہر حد کی علامت بدل سکتے ہیں، کیونکہ یہ برابر ہے تمام حدود کو منتقل کرنے کے بعد داہنے جانب کو بایاں و بائیں کو داہنا بنانے کے۔

مثال: مساوات $-3\text{س}-12 = \text{س}-24$

منتقل کیا تو ہوا $-\text{س}+24 = 3\text{س}+12$

یا $3\text{س}+12 = -\text{س}+24$

جو کہ عین مساوات ہے، حدود کی علامت بدلے ہونے کے ساتھ۔

72. حل کرو $\frac{\text{س}}{2} - 3 = \frac{\text{س}}{4} + \frac{\text{س}}{5}$

یہاں مناسب ہوگا کہ اولاً ضریباتِ مکسور والی مساوات کو ختم کیا جائے، و یہ مساوات کے دونوں جانب کو ما تحتوں کے ادنی حاصل ضربی مشترک سے ضرب دے کے حل کیا جا سکتا ہے۔

لہذا 20 سے ضرب دیا تو ہوا $10\text{س}-60 = 5\text{س}+4\text{س}$

منتقل کیا تو ہوا $10\text{س}-5\text{س}-4\text{س} = 60$

$\therefore \text{س} = 60$

73. اب ہم ایک مقدارِ مجہول والی مساواتِ بسیط کو حل کرنے کا عام قاعدہ وضع کر سکتے ہیں۔

قاعدہ: اولا مکسور کو ختم کرو اگر ضروری ہو، پھر مقدار مجہول والی ہر حد کو ایک جانب منتقل کرو و مقادیر معلوم کو دوسرے جانب۔ پھر حدود

کو جمع کرو و دونوں جانب کو مقدار مجہول کے ضریب سے تقسیم کرو، تو جو قیمت مطلوب ہے حاصل ہو جائے گی۔

مثال اول: حل کرو $5(\text{س}-3)-7(6-\text{س})+3 = 24-3(8-\text{س})$

چاندے ساقط کیا تو ہوا $5\text{س}-15-42+7\text{س}+3 = 24-24+3\text{س}$

منتقل کیا تو ہوا $5\text{س}+7\text{س}-3\text{س} = 24-24+15+42-3$

$\therefore 9\text{س} = 54$

$\therefore \text{س} = 6$

مثال دوم: حل کرو $5\text{س}-(4\text{س}-7)(3\text{س}-5) = 6-3(4\text{س}-9)(\text{س}-1)$

تبسیط کیا تو ہوا $5\text{س}-(12\text{س}^2-41\text{س}+35) = 6-3(4\text{س}^2-13\text{س}+9)$

پھر چاندے حل کیا تو ہوا

$5\text{س}-12\text{س}^2+41\text{س}-35 = 6-12\text{س}^2+39\text{س}-27$

پھر -12س^2 کو دونوں جانب سے ساقط کر دیا و منتقل کیا۔

تو ہوا $5\text{س}+41\text{س}-39\text{س} = 6-27+35$

$\therefore 7\text{س} = 14$

$\therefore \text{س} = 2$

توضیح: قبل چاندہ علامت - اُس میں موجود ہر حد کو متأثر کرتی ہے، لہذا مثال دوم میں ہم نے چاندے ساقط نہیں کیا جب تک کہ ان کا حاصل ضرب نہیں آگیا۔

مثال سوم: حل کرو 7س-5[س-{7-6(س-3)}]=3س+1

چاندوں کو ساقط کیا تو ہوا

7س-5[س-{7-6س+18}] = 3س+1

7س-5[س-25+6س] = 3س+1

7س-5س+125-30س = 3س+1

7س-5س-30س-3س = 1-125

-31س = -124

∴ س = 4

74. مبتدی کے لیے مفید ہے کہ وہ تحقیق کی عادت ڈال لے یعنی اپنے نتیجہ کو ثابت کرنے کی۔ یہ ثبوت دل چسپ متاأثر کرنے والے ہوتے ہیں، و ایسی تحقیق کرنے کی عادت طالب کو اس کے عمل میں حوصلہ فراہم کرتی ہے۔

مساوات بسیط میں ہمیں خالص یہ دکھانا ہوتا ہے کہ جب ہم مساوات کے دونوں جانب س کی قیمت معین کریں گے تو ایک ہی نتیجہ حاصل ہوگا۔

مثال: ثابت کرنے کے لیے کہ س=2 مساوات کو تمام کرے گا۔

مثال دوم 73 مضمون .... (س-1)(4س-9)3-6 = (3س-5)(4س-7)-5س

جب س = 2، تو داہنا جانب ہوا

(5-6)(7-8)-10 = (3س-5)(4س-7)-5س

= 10-1

= 9

و بایاں جانب 6-3(4س-9)(س-1) = 6-3(8-9)(2-1)

= 6-3(-1) = 9

چونکہ دونوں نتیجے متساوی ہیں لہذا س=2 نے مساوات کو تمام کیا۔

75. درج ذیل مثالیں مساوات مکسور کو حل کرنے کے بڑے کارساز طُرُق نمایا کرتی ہیں۔

مثال اول: حل کرو 4 - $\frac{س - 9}{8} = \frac{س}{22} - \frac{1}{2}$

اس کو 88 سے ضرب دیا جو تمام ماتحتوں کا ادنی حاصل ضربی مشترک ہے،

تو آیا 352-11(س-9) = 4س-44

چاندوں کو ساقط کیا تو ہوا 352-11س+99 = 4س-44

منتقل کیا تو ہوا -11س-4س = -44-352-99

حدود کو اکٹھا کیا و علامت بدلا تو ہوا 15س = 495

س = 33

دھیان رہے کہ اس مساوات میں $-\frac{س-9}{8}$ ایک حد کے قائم مقام ہے اس کے قبل علامت تفریق ہونے کے ساتھ۔ و یہ متساوی ہے $-\frac{1}{8}(س-9)$ کے، و وہ خط جو ما فوق و ما تحت کے درمیان ہے اس کا حکم وہی ہے جو چاندوں کا ہے۔

76. بعض حالات میں کل مساوات کو ادنی حاصل ضربی مشترک سے ضرب دینا افضل نہیں ہوتا، بلکہ مکسور کو دو یا زیادہ اقدام میں ختم کرتے ہیں۔

مثال دوم: حل کرو $\frac{س-4}{3}+\frac{2س-3}{35}=\frac{5س-32}{9}-\frac{س+9}{28}$

پہلے کل کو 9 سے ضرب دیا تو ہوا

$$3س-12+\frac{18س-27}{35}=5س-32-\frac{9س+81}{28}$$

منتقل کیا تو ہوا $\frac{18س-27}{35}+\frac{9س+81}{28}=2س-20$

اب 5×7×4 یا 140 سے ضرب دے کے مکسور کو ختم کیا تو ہوا

$$72س-108+45س+405=280س-2800$$

$$\therefore 2800-108+405=280س-72س-45س$$

$$\therefore 3097=163س$$

$$\therefore س=19$$

77. ان مساوات کو حل کرنے کے لیے جن میں ضریب **اعشاری** ہوں ہم ان اعشاریات کو مکسور کی حالت میں تعبیر کریں گے، پھر پہلے کے مثل حل کریں گے۔ لیکن عام طور پہ اعشاری میں عمل کرنا زیادہ آسام ہوتا ہے۔

مثال اول: حل کرو $0.6\text{س}+0.25-\frac{1}{9}\text{س} = 1.8-0.75\text{س}-\frac{1}{3}$

عدد اعشاری کو مکسور کی صورت میں تعبیر کیا تو ہوا

$$\frac{2}{3}\text{س}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\text{س} = 1\frac{8}{9}-\frac{3}{4}\text{س}-\frac{1}{3}$$

مکسور کو ختم کیا تو ہوا $24\text{س}+9-4\text{س} = 68-27\text{س}-12$

منتقل کیا تو ہوا $24\text{س}-4\text{س}+27\text{س} = 68-12-9$

$\therefore 47\text{س} = 47$

$\therefore \text{س} = 1$

مثال دوم: حل کرو $0.375\text{س}-1.875 = 0.12\text{س}+1.185$

منتقل کیا تو ہوا $0.375\text{س}-0.12\text{س} = 1.875+1.185$

حدود کو اکٹھا کیا تو ہوا $(0.375-0.12)\text{س} = 1.875+1.185$

$\therefore 0.255\text{س} = 3.06$

$\therefore \text{س} = 3.06\backslash 0.255$

$\therefore \text{س} = 12$

78. اس باب کو ختم کرنے سے قبل ہم درج ذیل صورت حال پہ توجہ دلانا چاہتے ہیں، جو مسائل حل کرنے میں باربار پیش آتی ہیں، تو مبتدی کو انہیں پہلی نظر میں حل کرنا سیکھ لینا چاہیے۔

مسئلہ اول: فرض کرو $\frac{7\text{س}}{5} = \frac{4}{3}$

دونوں جانب کو 5 سے ضرب دیا تو ہوا

$$\left.\begin{aligned} 7\text{س} &= \frac{5\times4}{3} \\ \text{س} &= \frac{5\times4}{3\times7} \end{aligned}\right\} \text{..............(1)}$$

مسئلہ دوم: فرض کرو $\frac{5}{3\text{س}} = \frac{9}{7}$

دونوں کو 3س سے ضرب دیا تو ہوا $5 = \frac{9 \times 3\text{س}}{7}$

$$\left.\begin{aligned} 5 \times 7 &= 9 \times 3\text{س} \\ \frac{5 \times 7}{9 \times 3} &= \text{س} \end{aligned}\right\} \text{..............(2)}$$

(1) و (2) کے نتائج میں غور کرنے سے درج ذیل اصول معلوم ہوتے ہیں۔

مساوات کے ایک جانب کے ما تحت کا کوئی بھی جز ضربی دوسرے جانب کے ما فوق میں منتقل کیا جا سکتا ہے، و ایک جانب کے ما فوق کا کوئی بھی جز ضربی دوسرے جانب کے ما تحت میں منتقل کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: اگر $\frac{3\text{س}}{14} = \frac{9}{35}$

تو ہوا $\text{س} = \frac{14\times9}{35\times3} = 1\frac{1}{5}$

مثال دوم: اگر $\frac{2}{3} = -5$

تو $\frac{2}{5} = -\text{س}$

$\therefore \text{س} = -\frac{2}{5}$

کچھ مشق کے بعد یہ حسابات ذہنی طور پہ کیے جا سکتے ہیں، و درمیانی اقدام حذف کیے جا سکتے ہیں۔

باب نواں: عبارت نقوشی

79. مسائل جبری حل کرنے میں اس کو نقوش میں تعبیر کرنا مبتدی کے لیے خاص دشوار ہوتا ہے۔ نقوش جبری میں تعبیر کیا ہوا سوال متشوش ہوتا ہے، جب کہ ویسا ہی سوال حساب اساسی کا کچھ مشکل نہیں ہوتا۔ لہذا یہ ہو سکتا ہے کہ "ﺳ سے ﻋ زیادہ عدد کتنا ہوا؟" کا جواب مبتدی کے لیے واضح نہ ہو، جب کہ وہ بے جھجک اسی کے جیسے حساب اساسی کے مسئلہ کا جواب دے دے گا کہ "50 سے 6 زیادہ عدد کتنا ہوا؟"۔ عمل جمع، جس سے دوسرے سوال کا جواب حاصل ہوا، دلالت کرتا ہے کہ جیسے جو عدد 50 سے 6 زیادہ ہے وہ 50+6 ہے، تو ایسے ہی جو عدد ﺳ سے ﻋ زیادہ ہے وہ ﺳ+ﻋ ہے۔

80. درج ذیل مثالیں اس باب کا بہترین تعارف کراتی ہیں۔
پہلی مثال کے علاوہ میں ہم نظیر قائم کرنا طالب پہ جھوڑتے ہیں۔

مثال اول: ﺳ 17 سے کتنا زیادہ ہے؟

ﺳ کے لیے ایک عددی نظیر وضع کرو مثلاً "27 17 سے کتنا زیادہ؟"

ظاہر کے کہ اس کا جواب 10 ہے جو 27-17 کے متساوی ہے۔

لہذا ﺳ کی 17 پہ زیادتی ہوئی ﺳ-17۔

و ﺳ کی 17 سے کمی ہوئی 17-ﺳ۔

مثال دوم: اگر س 45 کا ایک جز ہے تو باقی جز 45-س ہوگا۔

مثال سوم: اگر س 45 کا ایک جز ضربِی ہے تو دوسرا جزی $\frac{45}{\text{س}}$ ہوگا۔

مثال چہارم: ایک شخص ع گھنٹے میں کتنی مسافت چلے گا، اگر 1 گھنٹے میں 4 میل چلتا ہے؟

1 گنٹے میں 4 میل چلتا ہے،

تو ع گھنٹے میں 4 میل سے ع مرتبہ زیادہ چلے گا یعنی 4ع میل۔

مثال پنجم: اگر ₹20 کو ف لوگوں میں برابر سے تقسیم کیا جائے تو ہر ایک کے حصہ میں جو مقدار آئے گی وہ کل مال کو اشخاص کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوگی، یعنی ₹$\frac{20}{\text{ف}}$ ۔

مثال ششم: اگر 17 کو 2 سے تقسیم کیا تو حاصلِ تقسیم 2 آیا و بقیہ 5 یعنی $\frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6}$

تو اگر ہم م کو ق سے تقسیم کریں، و حاصل تقسیم ح آئے، و باقی رہے ب۔

تو ہوا $\frac{\text{م}}{\text{ق}} = \text{ح} + \frac{\text{ب}}{\text{ق}}$

یا $\text{م} = \text{حق}+\text{ب}$

لہذا اگر مقسوم بہ ﺳ، حاصل تقسیم ﻓ، و بقیہ د ہے تو مقسوم ﺳﻓ+د ہوگا۔

مثال ہفتم: ﻋ و ب پیسے کے لیے جواں کھیل رہے ہیں۔ ﻋ نے ﺿ₹ سے شروع کیا، و ب نے ﺷ پیسے سے، پھر ب ﺳ₹ جیت گیا، تو دونوں میں سے ہر ایک کے پاس کتنے پیسے ہوئے؟

جو ب نے پایا وہ ﻋ نے گنوایا۔

∴ ﻋ کے پاس 100(ﺿ-ﺳ) پیسے ہیں

و ب کے پاس ﺷ+100ﺳ پیسے ہیں

81. اب ہم بعض مشکل امثلہ ان کے حل کے ساتھ بیان کریں گے۔

مثال اول: اس شخص کی موجودہ عمر کیا ہوگی جو ﺳ سال بعد اپنے لڑکے سے ﻣ گنا عمر دراز ہوگا، و وہ لڑکا ابھی ﻓ سال کا ہے؟

ﺳ سال کے بعد لڑکے کی عمر ﻓ+ﺳ سال ہوگی، تو باپ کی عمر ﻣ(ﻓ+ﺳ) سال ہوگی، لہذا باپ کی عمر ابھی ﻣ(ﻓ+ﺳ)-ﺳ ہوئی۔

مثال دوم: ﮐ₹ پہ ﺗ سال میں ﻓ فیصد کے اعتبار سے کتنا سودِ بسیط بنا؟

₹100 پہ ایک سال میں ﻓ₹ سود ہوا

∴ ₹1 پہ ایک سال میر $\frac{ﻓ}{100}$ ₹

∴ ﮐ₹ پہ ایک سال میر $\frac{ﻓﮐ}{100}$ ₹

∴ ک₹ پہ تـ سال میں سود ہوا $\frac{تکف}{100}$ ₹

مثال سوم: ایک کمرا س یارڈ طویل، ف فوٹ عریض و ع فوٹ عمیق ہے، تو بتاو کہ فرش کے لیے کتنی مربع یارڈ دری چاہیے، و دیواروں کے لیے کتنی یارڈ وال پیپر چاہیے۔

اولاً ہم تمام مقادیر کو یکساں وحدت میں تعبیر گریں گے

و 1 یارڈ = 3 فوٹ۔

∴ س یارڈ = 3س فوٹ

(1) فرش کا رقبہ ہوا 3سف مربع فوٹ

∴ مربع یارڈ دری کی مقدار مطلوب ہوئی $\frac{3سف}{9} = \frac{سف}{3}$

(2) کمرے کا محیط ہوا 2(3س+ف) فوٹ

∴ دیوار کا رقبہ ہوا 2ع(3س+ف) مربع فوٹ

تو مربع یارڈ وال پیپر کی مقدار مطلوب ہوئی $\frac{2ع(3س+ف)}{9}$

مثال جہارم: ایک عدد جس کی ارقام داہینے سے ع، بـ، جـ ہیں۔ بتاو وہ عدد کیا ہے؟

یہاں ع مقامِ اکائی میں واقع ہے، بـ دہائی میں، جـ صدہائی میں۔

لہذا یہ عدد ہوا ع+10بـ+100جـ۔
و اگر ان ارقام کو منعکس کر دیا جائے تو ایک جدید عدد بن جائے گا جس کی نقوشی تعبیر ہوگی جـ+10بـ+100ع۔

مثال پنجم: تین اعداد متسلسل، جن کا اقلّ ط ہو، کا اجتماع و حاصل ضرب کیا ہوگا؟

ط سے اعداد متسلسل ہوئے ط، ط+1، ط+2

∴ اجتماع ہوا   ط+(ط+1)+(ط+2) = 3ط+3

∴ حاصل ضرب ہوا   ط(ط+1)(ط+2)

یہاں ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی بھی عدد جفت 2ط سے تعبیر کیا جا سکتا ہے، جب کہ ط سے مراد ایجابی عدد طبیعی ہو، کیونکہ وہ عبارت 2 سے کامل تقسیم ہو جائے گی۔ و ایسے ہی کوئی بھی عدد تاق 2ط+1 سے تعبیر کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ عبارت جب 2 سے تقسیم ہوگی تو 1 باقی رہے گا۔

82.   مضمون 80 کی مثالِ ششم میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\frac{م}{ق} = ح + \frac{ب}{ق}$$

یہ ایک ایسا نتیجہ ہے جو ایک عدد و اس کے مقسوم بہ و حاصل تقسیم و بقیہ کے تعلق کو ایک ہی عبارت میں ظاہر کر رہا ہے۔

یہ عبارت جبری کی ایک اہم نوع کی مثال ہے جس کو **فارمولہ** کہا جاتا ہے۔
یہاں مناسب ہے کہ اس کے استعمال و غایت کا مختصر تعارف کرا دیا جائے،
جو نہ صرف حساب جبر میں، بلکہ ریاضی کی دیگر انواع میں بھی
مستعمل ہے، و اساسی علم اصول طبیعت میں بھی ہے۔

تعریف: فارمولہ وہ تعلق ہے جو بعض مقادیر کے درمیان کسی وجہ سے
قائم ہو، و ان میں سے کوئی ایک مقدار مجہول تسلیم کی گئی ہو۔
لہذا فارمولۂ مذکور مین اگر ح، ب، ق معلوم ہوں، تو م کی قیمت، جو ان
سے متعلق ہے، حاصل کرنے کے لیے ہمارے پاس ایک مساوات ہوگی۔ یا اس
طرح سوال کیا جائے کہ "96 کو کس سے تقسیم کیا جائے کہ حاصل تقسیم
5 آئے، و باقی 11 رہے۔
یہاں ہمارے پاس م=96، ح=5، ب=11
تو ہم نے فارمولہ سے حاصل کیا کہ

$$\frac{96}{ق} = 5 + \frac{11}{ق}$$

$$\frac{96}{ق} - \frac{11}{ق} = 5$$

$$\frac{85}{ق} = 5$$

$$\frac{85}{5} = ق$$

$$ق = 17$$

تو ق=17 جو مقسوم بہ مطلوب ہے۔

83. یہاں علم ریاضی و علم طبیعت کی دیگر انواع کا بیان کرنا مناسب نہیں ہے، لیکن ان موضوعات کی اہمیت کی وجہ سے مبتدی کو چند اساسی فارمولوں کے جانب متوجہ کیا جا رہا ہے، جن سے دوسرے علوم میں اس کا سابقہ پڑ سکتا ہے۔

(1) اگر مثلث کا قاعد ق ہے و اس کا عمود ع تو اس کا رقبہ ر فارمولہ سے حاصل ہوا ر = $\frac{1}{2}$ ق ع

(2) اگر ھ بلندی کا ایک ہرم ایک سطح پہ قائم ہے جس کا رقبہ ہے ع^2، تو اس کی حجم ح کے حصول کا فارمولہ ہوا ح = $\frac{1}{3}$ ع^{2}ھ

ان مسائل مذکور میں کوئی بھی وحدت خطی یعنی میٹر و فوٹ وغیرہ اختیار کی جا سکتی ہے، و اسی کے مطابق دو و تین بُعد کی وحدت مربع و مکعب میٹر فوٹ وغیرہ ہوگی۔ و ان میں سے ہر فارمولہ میں اگر تین میں سے دو مقادیر معلوم ہوں تو تیسری بآسانی حاصل کی جا سکتی ہے۔

مثال: مصر کا ہرمِ عظیم ایک سطح مربع پہ قائم ہے جس کا ہر جانب 764 فوٹ ہے و بلندی 480 فوٹ۔

تو بتاو کہ کتنا فوٹ مکعّب پتھر اس میں مستعمل ہے

فارمولہ کے مطابق ح = $\frac{1}{3} \times 764 \times 480$

$= 764 \times 764 \times 160$

= 93391360 فوٹ مکعب

84. اس باب میں ہم نے بعض ایسی مثالیں بیان کی ہیں جو رفتار و زمان و مکان سے متعلق ہیں، و یہ سب بآسانی عام فہم سے حل کی جا سکتی ہیں و اسی کے ساتھ ہم یہ توضیح کرتے ہیں کہ یہ ایک عام فارمولہ پہ مبنی جزئی مسائل ہیں، و وہ فارمولہ ہے m = jr، جس میں m سے مراد وہ دوری ہے جو ایک جسم نے تمام کیا j زمان میں، r رفتار سے۔

اس فارمولہ میں اگر ع سے مراد وہ سیکنڈ ہوں جن میں جسم منتقل ہوا، و ب سے مراد وہ فوٹ ہوں جو اس نے ایک سیکنڈ میں تے کیا، تو m وہ فوٹ دوری ہوگی جو اس نے ع سیکنڈ میں تمام کیا۔

مثال: اگر ایک ریل گاڑی کی رفتار 75 فوٹ فی سیکنڈ، تو اسے 300 یارڈ کا پل عبور کرنے میں کتنا وقت لگے گا

پہلے m کی قیمت کو یارڈ سے فوٹ میں تبدیل کیا تو ہوا

300 یارڈ = 300 × 3 فوٹ = 900 فوٹ

اب فارمولہ میں m و r کے مقام پہ ان کی قیمتیں وضع کیا تو ہوا

j75 = 984

12 = 75\900 = j

تو وقت ہوا 12 سیکنڈ۔

85. زمینی قوتِ جاذبہ کی وجہ سے اوپر سے گرنے والے جسم کا مسئلہ ایک دلچسپ مسئلہ ہے۔ علم طبیعت میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر ایک جسم، جو پہلے ساکن تھا، گرا و j سیکنڈ میں م فوٹ دوری تمام کیا تو ہوا

$$\text{م} = \frac{1}{2}\,\text{ج}\,j^2$$

اس فارمولہ میں ج سے مراد وہ فوٹ ہیں جن میں ہر سیکنڈ رفتار زیادہ ہوتی ہے، زمین کی قوت جاذبہ کی وجہ سے، و دلیل تجربے سے معلوم ہوا ہے کہ ج=32.2 تقریبا۔

مثال اول: ایک پل سے ایک پتھر گرا جس نے پانی تک پہنچنے میں 4 سیکنڈ لیا، تو بتاو کہ دریا پہ پل کی بلندی کیا ہے؟

فارمولہ کے مطابق $\text{م} = \frac{1}{2}\times 32.2\times 4^2$

$= 257.6$

و لہذا پل کی بلندی ہوئی 257.6 فوٹ۔

مثال دوم: 144.9 فوٹ گہرے کویں کے سافل تک وصول میں ایک پتھر کتنا وقت لے گا؟

$$144.9 = \frac{1}{2}\times 32.2\times j^2$$

$$\therefore j^2 = 144.9\backslash 16.1 = 9$$

$\therefore j = 3$ یعنی 3 سیکنڈ کا وقت لگے گا۔

باب دسواں: مسائل جو مساوات بسیط تک لے جانے والے ہیں

86. اب باب سابق کے اصول کو مختلف مسائل حل کرنے میں استعمال کریں گے۔ جس کا طریقۂ عمل درج ذیل ہے۔

مقدار مجہول کے لیے س وضع کرو پھر مسئلہ کی کل شروط کو نقوش میں تعبیر کرو، تو ایک مساوات بسیط حاصل ہوگی، جس کو حل کرنے کے طرق باب آٹھویں میں مذکور ہیں۔

مثال اول: دو ایسے عدد بتاو جن کا اجتماع 28 ہو و فرق 4 ہو؟

فرض کرو کہ اقلّ عدد س ہے تو اکثر س+4 ہوا

ان کا اجتماع ہوا س+(س+4) جو متساوی ہے 28 کے

تو س+س+4 = 28

2س = 24

س = 12

س+4 = 16

تو وہ اعداد ہوئے 12 و 16۔

مثال دوم: 60 کو دو اجزاء میں اس طرح تقسیم کرو کہ جز اکبر کا 3 گنا 100 سے اتنا زیادہ ہو جائے جتنا جز اصغر کا 8 گنا 200 سے کم ہو۔

فرض کرو کہ جز اکبر س ہے، تو 60-س جز اصغر ہوا

اکبر کا 3 گنا 3س ہوا، و اس کی 100 پہ زیادتی 3س-100 ہوئی

و اصغر کا 8 گنا 8(60-س)، و اس کی 200 سے کمی ہوئی 200-8(60-س)

تو مسئلہ کی نقوشی تعبیر ہوئی

3س-100 = 200-8(60-س)

3س-100 = 200-480+8س

480-100-200 = 8س-3س

5س = 180

∴ س = 36، اکبر ہے

∴ 60-س = 24، اصغر ہے

مثال سوم: ₹47 کو ع، ب، ج میں اس طور پہ تقسیم کرو کہ ع کو ب سے ₹10 زیادہ ملے، ب کو ج سے ₹8 زیادہ ملے۔

فرض کرو کہ ج کا حصہ ₹س ہے، تو ب کا س+8 ہوا و ع کا س+8+10

لہذا س+(س+8)+(س+8+10) = 47

س+س+8+س+8+10 = 47

3س = 21

$س = \frac{21}{3} = 7$

تو ج کو ₹7 ملا، ب کو ₹15، و ء کو ₹25۔

مثال چہارم: ء کی عمر ب سے دو گنا ہے، دس سال قبل چار گنا تھی تو اس کی موجود عمر کیا ہے؟

فرض کرو کہ ب کی عمر س سال ہے تو ء کی 2س سال ہوئی

تو 10 سال قبل ان کی عمر ہوئی س-10 و 2س-10 سال

تو ہوا 2س-10 = 4(س-10)

2س-10 = 4س-40

4س-2س = 40-10

2س = 30

س = 15

تو ب 15 سال کا ہوا و ء 30 سال کا۔

تنبیہ: امثلہ مذکور میں مقدارِ مجہول س دال ہے رپیہ، سال وغیرہ کی تعداد پہ۔ اس میں متعلم کو اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ مفروض مبہم سے احتراز کرے جیسے "فرض کرو کہ س = ء کا حصہ" یا "س = رپیہ" یا ایسی کوئی دوسری مبہم و غامض عبارت۔

87. یہاں ہم ایک مسئلہ ذکر کر رہے ہیں جس کی مساوات میں جز ضربی مکسور شامل ہوگا۔

مثال: دو ایسے اعداد بتاو جن میں 4 کا فرق ہو، و اس کے اکثر کا نصف 8 زیادہ ہو اقل کے ایک چھٹویں سے؟

فرض کرو کہ عدد اقل س ہے، تو (س+4) اکثر ہوا۔

اکثر کا نصف تعبیر ہوگا عبارت $\frac{1}{2}$(س+4) سے

و اقل کا ایک چھٹواں $\frac{1}{6}$س سے

لہذا $\frac{1}{2}$(س+4)-$\frac{1}{6}$س = 8

6 سے ضرب دیا تو 3س+12-س = 48 ہوا

∴ 2س = 36

∴ س = 18، اقل عدد

∴ س+4 = 22، اکثر عدد

باب گیارہواں: اعلی جز ضربی مشترک و ادنی حاصل

ضربی مشترک

88. **تعریف:** دو یا زیادہ عباراتِ جبری کا **اعلی جز ضربی مشترک** وہ سب سے زیادہ درجہ کی عبارت ہے جو ان میں سے ہر ایک کو بلا بقیہ کے تقسیم کرے [مضمون 10]۔ و اختصارا ہم اسے **اَعْجَمْ** کہیں گے۔

89. عبارت بسیط کے اعجم کو خالص ملاحظہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: ع^4، ع^3، ع^2، ع^6 کا اعجم ہوگا ع^2

مثال دوم: ع^{3}بـ^4، عبـ^{5}جـ^2، ع^{2}بـ^{7}جـ کا اعجم ہوگا عبـ^4۔

اس لیے کہ ع کی سب سے بڑی قدر ع ہے جو ع^3، ع، ع^2 کو تقسیم کرتی ہے، و بـ^4، بـ کی سب سے بڑی قدر ہے جو بـ^4، بـ^5، بـ^7 کو تقسیم کرتی ہے، و جـ جز ضربی مشترک نہیں ہے۔

90. اگر عبارت میں ضریب رقمی بھی ہوں، تو حساب اساسی کے قاعدہ سے ان کی اعلی مقدار مشترک حاصل کرو پھر اس کو اعجم جبری کے قبل ضریب کے طور پہ بڑھاو۔

مثال: 21ع^{4}س^{3}ف، 35ع^{2}س^{4}ف، 28ع^{3}سف^{4} کا اعجم ہوا 7ع^{2}سف جو دو چیزوں کا حاصل ضرب ہے۔

1. ضریبات رقمی کی اعلی مقدار مشترک
2. ہر حرف کی وہ سب سے زیادہ قدر جو عبارات میں سے ہر ایک کو تقسیم کرے۔

91. **تعریف:** دو یا زیادہ عبارات جبری کا **ادنی حاصل ضربی مشترک** وہ سب سے کم درجہ کی عبارت ہے جو بلا بقیہ کے ان سب سے تقسیم ہو جائے۔ و اسے ہم **اَدْحَمْ** کہیں گے۔

92. عبارت بسیط کے مسئلہ میں ادحم کو خالص ملاحظہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: ع^{4}، ع^{3}، ع^{2}، ع^{6} کا ادحم ع^{6} ہوگا۔

مثال دوم: ع^{3}بـ^{4}، عبـ^{5}، ع^{2}بـ^{7} کا ادحم ہوگا ع^{3}بـ^{7}، کہ ع^{3} ع کی سب سے کم قدر ہے جو ع^{3}، ع، ع^{2} میں سے ہر مقادیر سے تقسیم ہو سکتی ہے، و بـ^{7} بـ کی سب سے کم قدر ہے جو بـ^{4}، بـ^{5}، بـ^{7} میں سے ہر مقادیر سے تقسیم ہوتی ہے۔

93. اگر عبارات میں ضریبات رقمی ہوں، تو حساب اساسی کے قاعدہ سے ان کا ادنی حاصل مشترک معلوم کر کے اس کو ضریب رقمی کے طور پہ جبری ادحم کے قبل بڑھاو۔

مثال: $21\text{ع}^{4}\text{س}^{3}\text{ف}$ ، $35\text{ع}^{2}\text{س}^{4}\text{ف}$ ، $28\text{ع}^{3}\text{سف}^{4}$ کا ادحم ہے $420\text{ع}^{4}\text{س}^{4}\text{ف}^{4}$ جو کہ حاصل ضرب ہے دو چیزوں کا

1. ضریبات رقمی کا ادنی حاصل ضربی مشترک
2. ہر حرف کی وہ سب سے کم قدر جو عبارات میں مذکور اسی حرف کی تمام اقدار سے تقسیم ہو۔

باب بارہواں: مکسورات اساسی

94. اس باب میں ہم خالص سہل مکسورات سے بحث کریں گے، یعنی جس میں ما فوق و ما تحت عبارت بسیط ہوں۔
ان کی تخفیف و تبسیط حساب اساسی کے قواعد سے کی جاتی ہے، ان قوانین کے ثبوت کو ہم اگلے باب میں بیان کریں گے جہاں مکسور کے موضوع کو مفصل بیان کیا جائے گا۔

95. **قاعدہ:** کسی مکسور کی، اس کی ادنی حد تک تخفیف کرنے کے لیے، اس کے ما فوق و ما تحت کو ہر اس جز ضربی سے تقسیم کرو جو ان دونوں میں مشترک ہو یعنی ان کے اعلی جز ضربی مشترک سے۔

ما فوق و ما تحت کو جز ضربی مشترک سے تقسیم کرنے کو ہم اس جز کو **منسوخ کرنا** کہیں گے۔

مثال: (1) $\frac{6\text{ع}^{2}\text{ج}}{9\text{ع}\text{ج}^{2}} = \frac{2\text{ع}}{3\text{ج}}$

(2) $\frac{7\text{س}^{2}\text{ف}\text{ض}}{28\text{س}^{3}\text{ف}\text{ض}^{2}} = \frac{1}{4\text{س}\text{ض}}$

(3) $\frac{35\text{ع}^{5}\text{ب}^{3}\text{ج}}{7\text{ع}\text{ب}^{2}\text{ج}} = \frac{5\text{ع}^{4}\text{ب}}{1} = 5\text{ع}^{4}\text{ب}$

.96 **قاعدہ:** مکسورات کو ضرب کرنے کے لیے ان کے تمام مافوقوں کو ضرب دو تو جو حاصل ہوگا وہ نتیجہ کا مافوق ہوگا، و ان کے تمام ما تحتوں کو ضرب دو تو جو حاصل ہوگا وہ نتیجہ کا ما تحت ہوگا۔

مثال اول: $\frac{2\text{ع}}{3\text{ب}} \times \frac{5\text{س}^2}{2\text{ع}^2\text{ب}} \times \frac{3\text{ب}^2}{2\text{س}} = \frac{2\text{ع} \times 5\text{س}^2 \times 3\text{ب}^2}{3\text{ب} \times 2\text{ع}^2\text{ب} \times 2\text{س}} = \frac{5\text{س}}{2\text{ع}}$

یہ نتیجہ حاصل ہوا ہے تمام ما فوق و ما تحت کے مشترک اجزاء ضربی کو منسوخ کر کے۔

مثال دوم: $\frac{3\text{ع}^2\text{ب}}{5\text{ج}^2} \times \frac{7\text{بج}}{3\text{ع}^3} \times \frac{5\text{جع}}{7\text{ب}^2} = 1$

اس میں ہر جز ضربی نے ایک دوسرے کو منسوخ کر دیا۔

.97 **قاعدہ:** ایک مکسور کو دوسرے سے تقسیم کرنے کے لیے مقسوم بہ کو مقلوب کرو و ضرب کے مثل حل کرو۔

مثال: $\frac{7\text{ع}^3}{4\text{س}^3\text{ف}^2} \times \frac{6\text{ج}^3\text{س}}{5\text{عب}^2} \div \frac{28\text{ع}^2\text{ج}^2}{15\text{ب}^2\text{سف}^2}$

$$= \frac{7\text{ع}^3}{4\text{س}^3\text{ف}^2} \times \frac{6\text{ج}^3\text{س}}{5\text{عب}^2} \times \frac{15\text{ب}^2\text{سف}^2}{28\text{ع}^2\text{ج}^2} = \frac{9\text{ج}}{8\text{س}}$$

اس کے علاوہ کے دوسرے اجزاء ضربی نے ایک دوسرے کو منسوخ کر دیا۔

.98 مکسورات کا اجتماع و فرق حاصل کرنے کے لیے مشترک ما تحت تک اس کو مخفف کرو، و افضل ہے کہ مذکورہ مکسورات کے ماتحتوں کے ادحم کو معلوم کرو۔

مثال: درج ذیل مکسورات کا ادنی ما تحت مشترک بتاو

$$\frac{\text{ء}}{3\text{سف}} \text{،} \frac{\text{ب}}{6\text{سفض}} \text{،} \frac{\text{ج}}{2\text{فض}}$$

اس کے ما تحتوں کا ادحم ہوا 6سفض۔ پھر ہر مکسور کے ما فوق کو اس جز ضربی سے ضرب دیا جو اس کے ما تحت کو 6سفض بنانے کے لیے مطلوب ہے، تو ہوا

$$\frac{2\text{ءض}}{6\text{سفض}} \text{،} \frac{\text{ب}}{6\text{سفض}} \text{،} \frac{3\text{جس}}{6\text{سفض}}$$

99. **قاعدہ:** مکسورات کے جمع و تفریق کے لیے تمام مکسورات کو ان کے ادنی ما تحت مشترک کے ساتھ تعبیر کرو، پھر ان کے ما فوقوں کو حسبِ مطلوب جمع یا تفریق کرو، و ما تحت کو مشترک ہی رکھو۔

مثال اول: $\frac{5\text{س}}{3} + \frac{3\text{س}}{4} - \frac{7\text{س}}{6}$ کی تبسیط کرو

اس کا ادنی ما تحت مشترک ہوا 12

تو ہوا $\frac{20\text{س} + 9\text{س} - 14\text{س}}{12} = \frac{15\text{س}}{12} = \frac{5\text{س}}{4}$

مثال دوم: $\frac{3\text{ءب}}{5\text{س}} - \frac{\text{ءب}}{2\text{س}} - \frac{1}{10} \times \frac{\text{ءب}}{\text{س}}$ کی تبسیط کرو

$$= \frac{6\text{ءب} - 5\text{ءب} - \text{ءب}}{10\text{س}} = \frac{0}{10\text{س}} = 0$$

مثال سوم: $\frac{\text{2س}}{\text{ع}^2\text{ب}^2} - \frac{\text{ف}}{\text{3جع}^3}$ کی تبسیط کرو

$= \frac{\text{6عس} - \text{جف}}{\text{3ع}^3\text{ب}^2}$ اس میں مزید تبسیط نہ ہوگی۔

تنبیہ: مبتدی کو **مختلف علامات والی یکساں حدود کو ساقط کرنے** میں جیسا کہ مثال دوم میں ہوا ہے، و ضرب کے عمل میں یا مکسور کی تخفیفِ کے دوران، **متساوی اجزاء ضربی کو منسوخ کرنے** میں، خوب دھیان سے فرق کرنا چاہیے۔ مزید یہ کہ مکسور کے اختصار میں اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ ما فوق و ما تحت سے جز ضربی تبھی منسوخ ہو سکتا ہے جب وہ ان دونوں کو پورا تقسیم کرے۔ لہذا $\frac{\text{6عس} - \text{جف}}{\text{3ع}^3\text{ب}^2}$ میں ج منسوخ نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ خالص جف کو تقسیم کر رہا ہے نہ کہ پورے ما فوق کو، ایسے ہی ع منسوخ نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ خالص 6عس کو تقسیم کر رہا ہے نہ کہ کل ما فوق کو۔ لہذا یہ مکسور اپنی سب سے مخفف حالت میں ہے۔

جب کوئی ما تحت مذکور نہ ہو تو 1 مقدر ہوتا ہے

مثال: $\text{3س} - \frac{\text{ع}^2}{\text{4ف}} = \frac{\text{3س}}{1} - \frac{\text{ع}^2}{\text{4ف}}$

$= \frac{\text{12سف} - \text{ع}^2}{\text{4ف}}$

باب تیرہواں: مساوات متقارن

100. غور کرو کہ 2س+5ص = 23، ایک ایسی مساوات ہے جو دو مجہول مقادیر کو ضمن میں لیے ہے۔

اس سے حاصل ہوا کہ 5ص = 23-2س

یعنی $ص = \frac{23 - 2س}{5}$ ....(1)

اس سے ظاہر ہے کہ ہر قیمت جو ہم س کے لیے وضع کریں گے تو اس کے مطابق ص کے لیے کوئی قیمت ضروری ہوگی، لہذا ہم جتنے چاہیں اتنے ایسے جوڑے قیمتوں کے حاصل کر سکتے ہیں جو اس مساوات کو تمام کریں۔

نظیر کے طور پہ اگر س=1 تو (1) سے $ص = \frac{21}{5}$

و اگر س=-2، تو $ص = \frac{27}{5}$ و ایسے ہی جاری رہے گا۔

و اگر ہمارے پاس اسی طرح کی مزید ایک مساوات ہو مثلا

3س+4ص = 24

تو ہوگا $ص = \frac{24 - 3س}{4}$ ....(2)

اب اگر ہم س و ص کی ایسی قیمت طلب کریں جو دونوں مساوات کو تمام کرے، تو ص کی قیمت (1) و (2) میں لازما متساوی ہوگی۔

لہذا $\frac{23 - 2س}{5} = \frac{24 - 3س}{4}$

خلاف میں ضرب دیا تو ہوا 92-8س = 120-15س

∴ 7س = 28

∴ س = 4

اب اس قیمت کو پہلی مساوات میں رکھا تو ہوا

8+5ف = 23

∴ 5ف = 15

∴ ف = 3

و س = 4

لہذا اگر مذکورہ دونوں مساوات کو س و ف کی یکساں قیمتوں سے تمام کرنا ہو تو اس کا خالص ایک ہی حل آئے گا۔

101. **تعریف:** جب دو یا زیادہ مساوات مقادیر مجہول کی یکساں قیمتوں سے تمام ہوں تو ان کو **مساواتِ متقارن** کہیں گے۔

ہم آگے مساوات متقارن کو حل کرنے کے لیے مختلف طرق بیان کریں گے، لیکن اس باب میں سہل مسائل پہ اکتفاء کیا ہے، یعنی جس میں مقدار مجہول پہلے درجہ کی ہو۔

102. مثال مذکور کو حل کرنے کا جو طریقہ ہم نے استعمال کیا ہے وہ مساوات متقارن کے معنی کو خوب واضح کرنے والا ہے، لیکن یہ طریقہ عمل میں بہت مناسب نہیں ہے۔ و ان دونوں مساوات کا ایک ساتھ صادق ہونا ذہن میں یہ بات پیدا کرتا ہے کہ جو مساوات ان دونوں کو مرکب کر کے حاصل ہوگی وہ س و ص کی ان قیمتوں سے تمام ہوگی جو دونوں مساوات مذکور کو تمام کرنے والی ہیں۔ تو ہمارا مقصد ایک ایسی مساوات حاصل کرنا ہوتا ہے جو صرف ایک مقدارِ مجہول کو متضمن ہو۔

103. دونوں میں سے کسی مقدارِ مجہول کو ختم کرنے کے طریقہ کو ہم **زائل کرنا** کہیں گے۔ و یہ مساوات مذکور کی طبیعت کے اعتبار سے مختلف طرق سے متاثر ہوتا ہے۔

مثال اول: حل کرو 3س+7ص = 27 ....(1)

5س+2ص = 16 ....(2)

س کو زائل کرنے کے لیے ہم (1) کو 5 و (2) کو 3 میں ضرب دیں گے تا کہ دونوں میں س کے ضریب متساوی ہو جائیں۔

تو ہوا   135 = 15س+35ف

48 = 15س+6ف

تفریق کیا تو ہوا   87 = 29ف

∴   3 = ف

س کو معلوم کرنے کے لیے، ف کی قیمت کو دونوں مساوات میں سے کسی میں وضع کرو

تو (1) سے حاصل ہوا 3س+21 = 27

∴   2 = س

و   3 = ف

تنبیہ: جب ایک مقدار مجہول معلوم ہو جائے تو مسئلہ کو پورا پورا حل کرنے کے لیے جو مساوات چاہو استعمال کرو، لہذا اس مثال میں اگر ہم (2) میں ف کو 3 سے تبدیل کریں تو ہوگا 5

16 = 5س+6

∴ س = 2، پہلے کے مثل

مثال دوم: حل کرو 7س+2ف = 47 ....(1)

5س-4ف = 1 ....(2)

یہاں ف زائل کرنا زیادہ مناسب ہے

(1) کو 2 میں ضرب دیا تو 14س+4ض = 94

و (2) سے پایا   5س-4ض = 1

اجتماع   19س = 95

∴ س = 5

اس قیمت کو (1) میں س سے تبدیل کیا تو ہوا

∴ 35+2ض = 47

∴ ض = 6

و س = 5

تنبیہ: جب ایک مقدار مجہول کے ضریبات رقمی متساوی ہوں و ان کی علامات مختلف ہوں تو جمع کرو، و اگر ضریبات رقمی متساوی ہوں و علامات متشابہ ہوں تو تفریق کرو۔

مثال سوم: حل کرو 2س = 5ض+1 ....(1)

24-7س = 3ض ....(2)

یہاں ہم (2) میں سے س کو زایل کر سکتے ہیں، اس کو اس کی قیمت سے تبدیل کر کے جو (1) میں حاصل ہوئی ہے

لہذا ہوا $24 - \frac{7}{2}$ (5ض+1) = 3ض

∴ 48-35ڤ-7 = 6ڤ

∴ ڤ = 1

و (1) سے س = 3

104. مذکورہ بالا طرق حلِ مسائل کے لیے کافی ہیں، لیکن بعض ایسے حسابی حیلوں کو جان لینا افضل ہے جو حل کے عمل کو کافی مختصر کر دیتے ہیں جن میں سب سے مفید درج ذیل مثال میں نمایاں ہے۔

مثال اول: حل کرو 171س-213ڤ = 642 ....(1)

114س-326ڤ = 2442 ....(2)

چونکہ کہ 171 و 114 ایک مشترک جز ضربی کو متضمن ہیں، و وہ ہے 57۔ لہذا ہم دونوں مساوات میں س کے ضریب کو 171 و 114 کے ادنی حاصل ضربی مشترک کے متساوی بنا سکتے ہیں، (1) کو 2 میں و (2) کو 3 میں ضرب دے کے۔

تو ہوگا 342س-426ڤ = 1284

342س-978ڤ =732

تفریق 552ڤ = 552

یعنی ڤ = 1

جبکہ س = 5

مثال دوم: حل کرو 127س+59ف = 1928 ....(1)

59س+127ف = 1792 ....(2)

اجتماع 186س+186ف = 3720

∴ س+ف = 20 ....(3)

تفریق (1) سے (2) کی تو 68س-68ف = 136

∴ س-ف = 2 ....(4)

تو (1) و (2) کی ترکیب سے مسئلہ (3) و (4) کو حل کرنے تک مخفف ہو گیا۔

انہیں جمع کر کے ہم نے پایا 2س = 22، و تفریق کر کے پایا 2ف = 18۔

لہذا س = 11، ف = 9۔

105. یہاں ہم بعض ایسے مسائل ذکر کر رہے ہیں جن کو حل کرنے سے قبل ان میں تبسیط کرنا لازم ہے۔

مثال اول: حل کرو 5(س+2ف)-(3س+11ف) = 14 ....(1)

7س-9ف-3(س-4ف) = 38 ....(2)

(1) سے حاصل ہوا 5س+10ف-3س-11ف = 14

∴ 2س-ف = 14 ....(3)

(2) سے حاصل ہوا 7س-9ف-3س+12ف = 38

∴ 4س+3ف = 38 ....(4)

(3) سے ثابت ہوا $\quad 6\text{س}-3\text{ف} = 42$

تو ہم نے پایا س=8 و ف=2۔

مثال دوم: حل کرو $\quad 3\text{س} - \frac{\text{ف}-5}{7} = \frac{4\text{س}-3}{2} \quad$ ....(1)

$$\frac{3\text{ف}+4}{5} - \frac{1}{3}(2\text{س} - 5) = \text{ف} \quad ....(2)$$

مکسور کو ختم کیا تو حاصل ہوا

(1) سے $\quad 42\text{س}-2\text{ف}+10 = 28\text{س}-21$

$\therefore \quad 14\text{س}-2\text{ف} = -31 \quad ....(3)$

و (2) سے $\quad 9\text{ف}+12-10\text{س}+25 = 15\text{ف}$

$\therefore \quad 10\text{س}+6\text{ف} = 37 \quad ....(4)$

(3) و (4) میں سے ف کو زائل کیا تو پایا کہ

$$\text{س} = -\frac{14}{13}$$

و (3) و (4) میں سے س کو زائل کیا تو پایا کہ

$$\text{ف} = \frac{207}{26}$$

تنبیہ: کبھی، جیسے کہ اسی مسئلہ میں، دوسری مقدار مجہول کی قیمت کو، پہلی مقدار کی معلوم ہو چکی قیمت کو عبارت میں وضع کر کے حاصل کرنے سے آسان ہوتا ہے اسے زائل کر کے حاصل کرنا۔

106. مساوات متقارن جو دو مقادیر مجہول کو متضمن ہوتی ہے، تو اس کو حل کرنے کے لیے ہمارے پاس دو مساوات ہونی چاہیے، ایسے ہی تین مجہول مقادیر والی مساوات متقارن کو حل کرنے کے لیے ہمارے پاس تین مساوات ہونی چاہیے۔

قاعدہ: مساوات کے کسی جوڑے سے ایک مقدار مجہول کو زائل کرو و پھر اسی مجہول کو دوسرے جوڑے سے بھی زائل کرو، تو دو ایسی مساوات حاصل ہوں گی، جو دو مقادیر مجہول کو متضمن ہوں گی۔ و وہ پہلے مذکور قواعد سے حل کی جائیں گی۔ اب جو مقدار مجہول باقی رہ گئی اس کو کسی بھی مذکور عبارت میں مقادیر معلومہ کو وضع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: حل کرو 6س+2ف-5ض = 13 ....(1)

3س+3ف-2ض = 13 ....(2)

7س+5ف-3ض = 26 ....(3)

زائل کرنے کے لیے یہاں ہم نے مقدار مجہول ف کو اختیار کیا ہے

(1) میں 3 کو ضرب دیا و (2) میں 2 کو ضرب دیا تو ہوا

18س+6ف-15ض = 39

6س+6ف-4ض = 26

تفریق کیا 12س-11ض = 13 ....(4)

پھر (1) میں 5 کو و (3) میں 2 کو ضرب دیا تو ہوا

30س+10ف-25ض = 65

14س+10ف-6ض = 52

تفریق کیا 16س-19ض = 13 ....(5)

(4) میں 4 و (5) میں 3 کو ضرب دو

48س-44ض = 52

48س-57ض = 39

تفریق کیا 13ض = 13

∴ ض = 1

و (4) سے س = 2

و (1) سے ف = 3

تنبیہ: کچھ مشق کرنے کے بعد متعلم جان لے گا کہ مساوات مذکور کی مناسب ترکیب سے حل کے طریقہ کو کافی مختصر کیا جا سکتا ہے۔ لہذا موجودہ مسئلہ میں (1) و (2) کو جمع کر کے و (3) کو مفرق کر کے، ہم نے

پایا 2س-4ض = 0، یا س=2ض جس کو (1) و (2) میں وضع کیا تو ہمیں دو

سہل مساوات حاصل ہوئیں ف و ض میں۔

مثال دوم: حل کرو $\frac{\text{س}}{2} - 1 = \frac{\text{ف}}{6} + 1 = \frac{\text{ض}}{7} + 2$

$$\frac{\text{ف}}{3} + \frac{\text{ض}}{2} = 13$$

از مساوات $\frac{\text{س}}{2} - 1 = \frac{\text{ف}}{6} + 1$

حاصل ہوا 3س-ف = 12 ....(1)

و از مساوات $\frac{\text{س}}{2} - 1 = \frac{\text{ض}}{7} + 2$

حاصل ہوا 7س-2ض = 42 ....(2)

و از مساوات $\frac{\text{ف}}{3} + \frac{\text{ض}}{2} = 13$

حاصل ہوا 2ف+3ض = 78 ....(3)

(2) و (3) سے ض کو زائل کیا تو

حاصل ہوا 21س+4ف = 282

و(1) سے 12س-4ف = 48

تب س=10، ﻫ=18، و ان کو (2) میں وضع کرنے سے حاصل ہوا ض=14

مثال سوم: 5س-3ﻫ-ض = 6 ....(1)

13س-7ﻫ+3ض = 14 ....(2)

7س-4ﻫ = 8 ....(3)

(1) کو 3 میں ضرب دیا پھر (2) میں جمع کیا تو حاصل ہوا

28س-16ﻫ = 32

7س-4ﻫ = 8

لہذا (1) و (2) کی ترتیب سے ہمیں ایک مساوات حاصل ہوئی جو (3) کے متشابہ ہے، و لہذا س و ﻫ کو حاصل کرنے کے لیے ہمارے پاس تنہاں مساوات ہے 7س-4ﻫ = 8، جس کا حل غیر متعین ہے [مضمون 100]۔

اس میں و اس جیسے مسائل میں کجی اس وجہ سے پیدا ہوتی ہے کیونکہ مساوات مطلق نہیں ہوتی، یا یہ کہا جائے کہ ایک مساوات دوسرے سے حاصل ہو سکتی و لہذا ان مقادیر مجہول کے کسی بھی جدید تعلق کو متضمن نہیں ہوتی جو دوسری مساوات میں موجود نہ ہو۔

107. **تعریف:** اگر دو مقادیر کا حاصل ضرب متساوی ہو عدد 1 کے، تو ان دونوں میں سے ہر ایک کو دوسرے کا **مقلوب** کہا جائے گا۔ لہذا اگر ءبـ = 1، تو ء و بـ **مقلوب** ہیں۔ وجہ تسمیہ یہ ہے کہ ء = $\frac{1}{بـ}$ و بـ = $\frac{1}{ء}$، لہذا ء کی بـ کے جانب وہی نسبت ہوئی جو بـ کی ء کے جانب ہوئی۔

س و ف کا مقلوب ہوا $\frac{1}{س}$ و $\frac{1}{ف}$۔ و مذکور مساوات حل کرنے میں ہم $\frac{1}{س}$ و $\frac{1}{ف}$ کو مقادیر مجہول میں شمار کرتے ہیں۔

مثال اول: حل کرو $\frac{8}{س} - \frac{9}{ف} = 1$ ....(1)

$\frac{10}{س} + \frac{6}{ف} = 7$ ....(2)

(1) میں 2 کو ضرب دیا و (2) میں 3 کو ضرب دیا تو ہوا

$$\frac{16}{س} - \frac{18}{ف} = 2$$

$$\frac{30}{س} + \frac{18}{ف} = 21$$

جمع کیا $\frac{46}{س} = 23$

ضرب دیا $46 = 23س$

$\text{س} = 2$

س کو (1) میں وضع کیا تو $\text{ف} = 3$

مثال دوم: حل کرو $\frac{1}{2\text{س}} + \frac{1}{4\text{ف}} - \frac{1}{3\text{ض}} = \frac{1}{4}$ ....(1)

$\frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{3\text{ف}}$ ....(2)

$\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{5\text{ف}} + \frac{4}{\text{ض}} = 2\frac{2}{15}$ ....(3)

ضریب کسری کو ختم کیا تو پایا

(1) سے $\frac{6}{\text{س}} + \frac{3}{\text{ف}} - \frac{4}{\text{ض}} = 3$ ....(4)

(2) سے $\frac{3}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ف}} = 0$ ....(5)

(3) سے $\frac{15}{\text{س}} - \frac{3}{\text{ف}} + \frac{60}{\text{ض}} = 32$ ....(6)

(4) میں 15 کو ضرب دیا و نتیجہ کو (6) سے جمع کیا تو ہوا

$$\frac{105}{\text{س}} + \frac{42}{\text{ف}} = 77$$

7س تقسیم کیا تو $\frac{15}{س} + \frac{6}{ف} = 11$ ....(7)

(5) سے $\frac{18}{س} - \frac{6}{ف} = 0$

$\therefore \frac{33}{س} = 11$

$\therefore س = 3$

(5) سے $ف = 1$

(4) سے $ض = 2$

باب چودھواں: مسائل جو مساوات متقارن کو موصل ہیں

108. گزشتہ باب کی مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ جتنی مقادیر مطلوب ہوں اتنی مساوات کا ہونا ضروری ہے۔ اسی لیے ان مسائل کو حل کرنے میں جو مساوات متقارن کو پیدا کرتے ہیں، ضروری ہے کہ مسئلہ کی عبارت میں اتنی شرائط مطلقاً موجود ہوں جتنی مقادیر مطلوب ہیں۔

مثال اول: دو ایسے اعداد بتاو جن کا فرق 11 ہو، و ان کے اجتماع کا ایک پانچواں 9 ہو

فرض کرو کہ س اعلی عدد ہے و ف ادنی عدد ہے

تو س-ف = 11 ....(1)

و $\frac{\text{س+ف}}{5}$ = 9

یا س+ف = 45 ....(2)

جمع کیا تو ہوا 2س = 56

و تفریق کیا تو ہوا 2ف = 34

تو اعداد جو مطلوب ہیں وہ ہوئے 28 و 17۔

مثال دوم: اگر ایک مکسور کے ما فوق کو 2 زیادہ کیا و ما تحت کو 1 کم کیا تو وہ متساوی ہوا 5\8 کے، اگر ما تحت و ما فوق دونوں کو 1 کم کیا تو متساوی ہوا 1\2 کے، بتاو کہ وہ مکسور کتنا ہے۔

فرض کرو کہ س مکسور کا ما فوق ہے، و ہ اس کا ماتحت ہے، تو مکسور ہوا س\ہ۔

پہلی شرط کے مطابق $\frac{\text{س}+2}{\text{ہ}+1} = \frac{5}{8}$ ....(1)

دوسری شرط کے مطابق $\frac{\text{س}-1}{\text{ہ}-1} = \frac{1}{2}$ ....(2)

یہ مساوات نتیجہ دیتی ہیں س = 8، ہ = 15

لہذا مکسور مطلوب ہوا $\frac{8}{15}$۔

مثال سوم: 100 و 1000 کے درمیان ایک ایسا عدد ہے جس کی درمیانی رقم 0 ہے، و دیگر ارقام کا اجتماع 11 ہے۔ اگر ان ارقام کو پلٹ دیا جائے تو جو عدد بنے گا وہ عدد مطلوب سے 495 زیادہ ہوگا۔ بتاو وہ کیا ہے۔

فرض کرو کہ س رقم ہے جو مقام اکائی میں ہے و ہ مقام صدہائی میں ہے۔

پھر چونکہ رقم جو دہائی کے مقام پہ ہے وہ 0 ہے۔ تو عدد مطلوب ہوا

(س×1)+(0×10)+(ہ×100)

= س+0+100ف = س+100ف

و اگر ارقام کو پلٹ دیا جائے تو ہوگا 100س+ف

100س+ف-(100ف+س)

یا 100س+ف-100ف-س = 495

∴ 99س-99ف = 495

یعنی س-ف = 5 ....(1)

چونکہ ارقام کا اجتماع 11 ہے، و رقم اوسط 0 ہے تو

س+ف = 11 ....(2)

(1) و (2) سے حاصل ہوا س = 8، ف = 3

لہذا عدد مطلوب 308 ہے۔

باب پندرہواں: تضرّب

109. **تعریف: تضرُّب** سے ہماری مراد ہے عبارت کو خود میں ضرب دینا اس کی دوسری، تیسری و چوتھی وغیرہ قدر معلوم کرنے کے لیے۔
جاننا چاہیے کہ تضربْ حقیقی عمل ضرب سے ہمیشہ متأثر ہوتا ہے۔

خیر یہاں ہم تین چیزوں کو ایک ہی مرتبہ میں معلوم کرنے کے لیے قواعد بیان کریں گے

پہلی، عبارت بسیط کی کوئی بھی قدر
دوسری، دو حدی عبارت کا مربع و مکعب
تیسری، متعدد حدی عبارت کا مربع۔

110. قاعدہ علامات سے معلوم ہوتا ہے کہ
1. کسی بھی مقدار کی جفت قدر کا نتیجہ سلبی نہیں ہو سکتا
2. کسی بھی مقدار کی تاق قدر کے نتیجہ کی علامت وہی ہوگی جو مقدار کی ہے۔

تنبیہ: اس بات کو خصوصا ذکر کرنا مناسب ہوگا کہ ہر عبارت کا مربع ایجابی نتیجہ دے گا، خواہ وہ عبارت ایجابی ہو یا سلبی۔

111. تعریف مذکور کے مطابق ضرب کے قواعد سے ہمیں معلوم ہوا کہ

$$(ع^2)^3 = ع^2 \times ع^2 \times ع^2 = ع^{2+2+2} = ع^6$$

$$(-س^3)^2 = (-س^3)(-س^3) = س^{3+3} = س^6$$

$$(-ع^5)^3 = (-ع^5)(-ع^5)(-ع^5) = -ع^{5+5+5} = -ع^{15}$$

$$(-3ع^3)^4 = (-3)^4 (ع^3)^4 = 81ع^{12}$$

اس سے ہمیں عبارت بسیط کو کسی بھی قرد تک لے جانے کا قاعدہ معلوم ہوا۔

قاعدۂ اول: حساب اساسی کے قواعد سے ضریب رقمی کی قدرِ مطلوب حاصل کرو، پھر اس کے قبل مناسب علامت لگاو مضمون 35 کے مطابق۔
قاعدۂ دوم: عبارت کے ہر ضریب حرفی کی قدر کو قدرِ مطلوب میں ضرب دو۔

مثال اول: $(-2س^2)^5 = -32س^{10}$

دوم: $(-3عب^3)^6 = 729ع^6ب^{18}$

سوم: $$\left(\frac{2عب^3}{3س^2ف}\right)^4 = \frac{16ع^4ب^{12}}{81س^8ف^4}$$

آخری مثال میں ما فوق و ما تحت پہ جدا جدا عمل کیا گیا ہے، جیسا کہ دیکھا جا سکتا ہے۔

112. عمل ضرب سے حاصل ہوا

$(ع+ب)^2 = (ع+ب)(ع+ب)$

$= ع^2+2عب+ب^2$ ....(1)

$(ع-ب)^2 = (ع-ب)(ع-ب)$

$= ع^2-2عب+ب^2$ ....(2)

یہ نتائج درج ذیل قواعد میں تعبیر ہیں۔

قاعدۂ اول: دو مقادیر کے اجتماع کا مربع متساوی ہوتا ہے، ان دونوں کے مربعات کے اجتماع کے جب کہ اس میں ان دونوں کے حاصل ضرب کا دو گنا جمع کر دیا جائے۔

قاعدۂ دوم: مقادیر کے فرق کا مربع متساوی ہوتا ان کے مربعات کے اجتماع کے جب کہ اس میں سے ان دونوں کے حاصل ضرب کا دو گنا کم کر دیا جائے۔

مثال اول: $(س+2ف)^2 = س^2+2\times س\times 2ف+(2ف)^2$

$= س^2+4سف+4ف^2$

مثال دوم: $(2ع^3-3ب^2)^2 = (2ع^3)^2-2\times 2ع^3\times 3ب^2+(3ب^2)^2$

$= 4ع^6-12ع^3ب^2+9ب^4$

113. مقادیر عددی کا مربع حاصل کرنے کے لیے بھی بعض اوقات بآسانی یہ قواعد جاری کیے جا سکتے ہیں۔

مثال اول: 1012 کا مربع = $(1000+12)^2$

$$= 1000^2+2\times1000\times12+12^2$$

$$= 1000000+24000+144$$

$$= 1024144$$

مثال دوم: 98 کا مربع = $(100-2)^2$

$$= (100)^2-2\times100\times2+(2)^2$$

$$= 10000-400+4$$

$$= 9604$$

یہ عمل پہلے کے دو اقدام کو حذف کر کے کافی مختصر کیا جا سکتا ہے۔

114. اب ہم مضمون 112 میں بیان کردہ قواعد کو وسیع کریں گے لہذا

$$(\text{ع}+\text{ب}+\text{ج})^2 = \{(\text{ع}+\text{ب})+\text{ج}\}^2$$

$$= (\text{ع}+\text{ب})^2+2(\text{ع}+\text{ب})\text{ج}+\text{ج}^2$$

$$= \text{ع}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2+2\text{عب}+2\text{عج}+2\text{بج}$$

ایسے ہی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$(\text{ع}-\text{ب}+\text{ج})^2 = \text{ع}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2-2\text{عب}+2\text{عج}-2\text{بج}$$

(ع+ب+ج+ض)^2 = ع^2+ب^2+ج^2+ض^2+2عب+2عج+2عض+2بج+2بض+2جض۔

ان میں سے ہر ایک میں ہم دیکھ سکتے کہ مربع متضمن ہے

1. مذکور عبارت کے تمام حدود کے مربع کے اجتماع کو
2. تمام حدود کے ہر دوسری کے ساتھ حواصل ضرب کے اجتماع کے دوگنے کو، ان کی مناسب علامات کے ساتھ یعنی ہر حاصل ضرب میں + یا - کی علامت ہوگی ان مقادیر کے مطابق جن سے وہ حاصل ہوا ہے ۔

تنبیہ: حدود مربع ہمیشہ ایجابی ہوتی ہے۔

اس قاعدہ کا اطلاق ہر اس عبارت پہ ہوگا جس کو مربع کرنا ہے، چاہے اس کی حدود جتنی ہوں۔

قاعدہ: کسی متعدد حدی عبارت کا مربع حاصل کرنے کے لیے، اس کی حدود کے مربعات کے اجتماع میں، ان تمام حواصلِ ضرب کا دوگنا جمع کرو جو ہر حد کو اس کے بعد والی ہر حد میں ضرب دینے سے حاصل ہوں۔

مثال اول: (س-2ف-3ض)^2

= س^2+4ف^2+9ض^2-2×س×2ف-2×س×3ض+2×2ف×3ض

$= س^2+4ف^2+9ض^2-4سف-6سض+12فض$

مثال دوم: $(1+2س-3س^2)^2$

$= 1+4س^2+9س^4+2×1×2س-2×1×3س^2-2×2س×3س^2$

$= 1+4س^2+9س^4+4س-6س^2-12س^3$

$= 1+4س-2س^2-12س^3+9س^4$

115. و عمل ضرب سے حاصل ہوا

$(ع+بـ)^3 = (ع+بـ)(ع+بـ)(ع+بـ)$

$= ع^3+3ع^2بـ+3عبـ^2+بـ^3$

ایسے ہی $(ع-بـ)^3 = ع^3-3ع^2بـ+3عبـ^2-بـ^3$

ان نتائج میں حدود کے حاصل ہونے کے طریقے میں غور کر کے ہم کسی بھی دو حدی عبارت کا نتیجہ بتا سکتے ہیں۔

مثال اول: $(2س+ف)^3 = (2س)^3+3(2س)^2ف+3(2س)ف^2+ف^3$

$= 8س^3+12س^2ف+6سف^2+ف^3$

مثال دوم: $(3س-2ع^2)^3 = (3س)^3-3(3س)^2(2ع^2)+3(3س)(2ع^2)^2-(2ع^2)^3$

$= 27س^3-54س^2ع^2+36سع^4-8ع^6$

باب سولہواں: عکس تضرُّب

116. کسی عبارت کا جذر وہ مقدار ہوتی ہے جس کو، مخصوص مرتبہ، خود میں ضرب دینے سے وہی عبارت حاصل ہو۔ [مضمون 15]
و جذر کو حاصل کرنے کے عمل کو ہم **عکسِ تضرب** کہیں گے کیونکہ یہ اس کا عکس ہے جس کا نام ہم نے تضرّب رکھا ہے۔

117. علامات کے قاعدہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

1. مقدار ایجابی کا ہر جفت جذر یعنی $\sqrt[2]{\ }$ و $\sqrt[4]{\ }$ وغیرہ، نا کہ $\sqrt[3]{\ }$ و $\sqrt[5]{\ }$ وغیرہ، یا تو ایجابی ہوتا ہے یا سلبی۔
2. کسی بھی سلبی مقدار کا جذر جفت نہیں ہوتا۔
3. مقدار کے ہر تاق جذر میں وہی علامت ہوگی جو مقدار میں ہے۔

تنبیہ: یہ بات ملحوظ رہے کہ ہر مقدار ایجابی کے دو جذر ہوتے ہیں جو شماریت میں متساوی ہوتے ہیں، لیکں علامت میں متضاد ہوتے ہیں۔

مثال: $\sqrt{(9\text{ع}^2\text{س}^6)} = \pm 3\text{ع}\text{س}^3$

بہر حال اس باب میں ہم ایجابی جذر پہ توجہ مقصور رکھیں گے۔

مثال: 1. $\sqrt{(\text{ع}^6\text{بـ}^4)} = \text{ع}^3\text{بـ}^2$

2. $\sqrt[3]{(-\text{س}^9)} = -\text{س}^3$

3. $\sqrt[5]{(ب^{20})} = ب^{4}$

4. $\sqrt[4]{(18س^{12})} = 3س^{3}$

118. لہذا ہمیں عبارت بسیط کے جذر مطلوب کو معلوم کرنے کے لیے عام قاعدہ حاصل ہوا۔

قاعدہ: ضریبِ رقمی کا جذر حساب اساسی کے قواعد سے حاصل کرو و اس کے قبل مناسب علامت وضع کرو جس کا ذکر مضمون 35 میں گزرا ہے۔ عبارت کے ہر ضریبِ حرفی کی قدر کو جذر مطلوب کی قدر سے تقسیم کرو۔

مثال: 1. $\sqrt[3]{(-64س^{6})} = -4س^{2}$

2. $\sqrt[4]{(16ع^{8})} = 2ع^{2}$

3. $\sqrt{\left(\frac{81س^{10}}{25ب^{4}}\right)} = \frac{9س^{5}}{5ب^{2}}$

آخری مثال میں ہم نے ما فوق و ما تحت میں جدا جدا عمل کیا ہے۔

119. عبارت مرکب کا جذر مربع حاصل کرنے کا بیان

چونکہ عبارت مرکب مثلا $ع+بـ$ کا مربع ہوتا ہے $ع^{2}+بـ^{2}+2عبـ$،

لہذا ہمیں ایسا طریقہ معلوم کرنا ہے کہ جب $ع^{2}+بـ^{2}+2عبـ$ مذکور ہو تو ہم ع و بـ کو حاصل کر سکیں۔

و وہ طریقہ یہ ہے کہ پہلے عبارت کو ایک حرف کی اقدار کے اعتبار سے

مرتب کرو مثلا $\text{ع}^2+2\text{عب}+\text{ب}^2$ ، پھر اسے مقسوم کے مقام پہ لکھو یعنی

$$\overline{)\ \text{ع}^2+2\text{عب}+\text{ب}^2}$$

پھر غور کرو کہ پہلی حد کا جذر مربع کیا ہے؟ جو یہاں ع ہے تو اسے حاصل

تقسیم کی پہلی حد بناو، و مقسوم سے اس کی پہلی حد یعنی ع^2 کو کم

کرو کہ اس کا نتیجہ 0 آئے۔

$$\begin{array}{r} \text{ع} \\ \overline{)\ \text{ع}^2+2\text{عب}+\text{ب}^2} \\ \text{ع}^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

واضح رہے کہ اس میں ہم نے مقسوم بہ کا کوئی ذکر نہیں کیا ہے۔

اب عبارت کی باقی حدود کو ان کی علامت کے ساتھ نیچے لاؤ

$$\begin{array}{r} \text{ع} \\ \overline{)\ \text{ع}^2+2\text{عب}+\text{ب}^2} \\ \text{ع}^2 \\ \hline 0+2\text{عب}+\text{ب}^2 \end{array}$$

اب حاصل تقسیم یعنی ع، کو دگنا کرو تو ہوگا 2ع، پھر اسے باقی مقسوم کا

مقسوم بہ بناو

ع

ع² +2عبـ +بـ²

ع²

2ع | 0 +2عبـ +بـ²

اب غور کرو کہ مقسوم بہ سے جدید مقسوم کی پہلی حد، یعنی 2عبـ، کس مقدار سے تقسیم ہوگی؟ و یہاں وہ مقدار بـ ہے، تو بـ کو حاصل تقسیم میں جمع کرو تو وہ ع+بـ ہو جائے گا، و بـ کو مقسوم بہ میں بھی جمع کرو تو وہ 2ع+بـ ہو جائے گا۔

ع+بـ

ع² +2عبـ +بـ²

ع²

2ع+بـ | 0 +2عبـ +بـ²

اب کل مقسوم بہ کو حاصل تقسیم کی سب سے آخری حد میں ضرب دو تو جو آئے اس کی باقی مقسوم سے تفریق کرو۔

ع+بـ

ع² +2عبـ +بـ²

ع²

2ع+بـ | 0 +2عبـ +بـ²

+2عبـ +بـ²

0 0

کچھ بھی باقی نہیں رہا، تو اب جو حاصل تقسیم ہے وہی ع²+2عبـ+بـ² کا جذر ہے یعنی ع+بـ ۔

مثال اول: 9س^2 -42سف +49ف^2 کا جذر مربع بتاو

3س -7ف

9س^2 -42سف +49ف^2

9س^2

6س-7ف 0 -42سف +49ف^2

-42سف +49ف^2

0 0

تفصیل: 9س^2 کا جذر مربع 3س ہےجو جذر کی پہلی حد ہے۔

اس کو دو گنا کیا تو 6س آیا جو مقسوم بہ کی پہلی حد ہوئی، پھر بقیہ کی پہلی حد -42سف کو 6س سے تقسیم کیا تو جذر کی جدید حد -7ف پایا، جس کو حاصل تقسیم و مقسوم بہ دونوں میں جمع کیا۔ پھر کل مقسوم بہ کو -7ف میں ضرب دیا و نتیجہ کو پہلے بقیہ سے مفرق کیا۔ تو اب کچھ باقی نہ رہا لہذا جذر حاصل ہو گیا۔

اس طریقہ کو مزید وسیع کیا جا سکتا ہے تاکہ متعدد حدی عبارت کا جذر معلوم ہو سکے۔ اول دو حدود پہلے کے مثل حاصل کی ہوں گی۔ و جب ہم دوسرے بقیہ کو نیچے لائیں گے، تو جدید مقسوم بہ کا پہلا جز، اب تک معلوم ہو چکے جذر کو دگنا کر کے حاصل ہوگا۔ پھر ہم جدید مقسوم بہ کی پہلی حد سے بقیہ کی پہلی حد کو تقسیم کریں گے و نتیجہ کو مقسوم بہ و جذر کی اگلی حد بنائیں گے۔ پھر ہم جذر کی آخری حد کو کل مقسوم بہ میں ضرب دین گے و حاصل ضرب کو آخری بقیہ سے مفرق کریں گے۔ اب

اگر کوئی بقیہ نہیں ہے تو جذر حاصل ہو گیا، و اگر بقیہ ہے تو ہم طریقۂ مذکور کو جاری رکھیں گے۔

مثال دوم: $25س^2ع^2 - 12سع^3 + 16س^4 + 4ع^4 - 24س^3ع$ کا جذر مربع بتاو

اقدار س کو ترتیب صعودی پہ مرتب کرو

$$4س^2 - 3سع + 2ع^2$$

$$\sqrt{16س^4 - 24س^3ع + 25س^2ع^2 - 12سع^3 + 4ع^4}$$

$$16س^4$$

$$8س^2 - 3سع \;\big)\; 0 \quad -24س^3ع + 25س^2ع^2 - 12سع^3 + 4ع^4$$

$$-24س^3ع + 9س^2ع^2$$

$$8س^2 - 6سع + 2ع^2 \;\big)\; 0 \quad 16س^2ع^2 - 12سع^3 + 4ع^4$$

$$16س^2ع^2 - 12سع^3 + 4ع^4$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

جب ہم نے جذر کی دو حدود $4س^2 - 3سع$ حاصل کر لیا تو ہمارے پاس باقی رہا $16س^2ع^2 - 12سع^3 + 4ع^4$

حاصل ہو چکی جذر کی حدود کو دو گنا کیا، پھر نتیجہ $8س^2 - 6سع$ کو مقسوم بہ کا جز بنایا۔ و بقیہ کی پہلی حد $16س^2ع^2$ کو مقسوم بہ کی پہلی حد $8س^2$ سے تقسیم کیا تو حاصل ہوا $+2ع$ جس کو جذر و مقسوم بہ دونوں میں جمع کیا۔ پھر مکمل مقسوم بہ کو $2ع^2$ سے تقسیم کیا پھر مفرق کیا۔ تو اب کچھ باقی نہیں رہا و جذر مطلوب حاصل ہو گیا۔

120. جب وہ عبارت جس کا جذر مربع حاصل کرنا ہو حدود مکسور کو ضمن میں لیے ہو، تب بھی ہم طریقۂ مذکور پہ عمل کریں گے، و مکسور کو باب بارہویں میں بیان کردہ قواعد سے حل کریں گے۔

121. اس میں ایک بات غور کرنے کی ہے کہ جب عبارت میں کسی حرف کی متعدد اقدار ہوں و اس کے مقلوب کی بھی اقدار ہوں مثلاً

$$2\text{س} + \frac{1}{\text{س}^2} + 4 + \text{س}^3 + \frac{5}{\text{س}} + 7\text{س}^2 + \frac{8}{\text{س}^3}$$

تو اقدار کی ترتیبِ نزولی ہوگی

$$\text{س}^3 + 7\text{س}^2 + 2\text{س} + 4 + \frac{5}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2} + \frac{8}{\text{س}^3}$$

و مقدار عددی 4 ہے جو س و $\frac{1}{\text{س}}$ کے درمیان ہے۔ و اس کی وجہ باب تیسویں میں آ رہی ہے۔

مثال: $24 + \frac{16\text{ف}^2}{\text{س}^2} - \frac{8\text{س}}{\text{ف}} + \frac{\text{س}^2}{\text{ف}^2} - \frac{32\text{ف}}{\text{س}}$ کا جذر مربع بتاؤ۔

عبارت کو ف کی ترتیب نزولی میں مرتب کرو، پھر عمل کرو۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{4\text{ف}}{\text{س}} - 4 + \frac{\text{س}}{\text{ف}} \\
\hline
 & \frac{16\text{ف}^2}{\text{س}^2} - \frac{32\text{ف}}{\text{س}} + 24 - \frac{8\text{س}}{\text{ف}} + \frac{\text{س}^2}{\text{ف}^2} \\
 & \frac{16\text{ف}^2}{\text{س}^2} \\
\hline
\frac{8\text{ف}}{\text{س}} - 4 & - \frac{32\text{ف}}{\text{س}} + 24 - \frac{8\text{س}}{\text{ف}} + \frac{\text{س}^2}{\text{ف}^2} \\
 & - \frac{32\text{ف}}{\text{س}} + 16 \\
\hline
\frac{8\text{ف}}{\text{س}} - 8 + \frac{\text{س}}{\text{ف}} & + 8 - \frac{8\text{س}}{\text{ف}} + \frac{\text{س}^2}{\text{ف}^2} \\
 & + 8 - \frac{8\text{س}}{\text{ف}} + \frac{\text{س}^2}{\text{ف}^2} \\
\hline
\end{array}
$$

یہاں جذر کی دوسری حد یعنی -4، $-\frac{32\text{ف}}{\text{س}}$ کو $\frac{8\text{ف}}{\text{س}}$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوئی ہے، و تیسری حد یعنی $\frac{\text{س}}{\text{ف}}$ ، 8 کو $\frac{8\text{ف}}{\text{س}}$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوئی ہے۔

لہذا $8 \div \frac{8\text{ف}}{\text{س}} = 8 \times \frac{\text{س}}{8\text{ف}} = \frac{\text{س}}{\text{ف}}$

[باقی باب کو باب ستاییسواں پڑھنے تک مؤخر کر سکتے ہو]

122. عبارت مرکب کا جذر مکعب حاصل کرنے کا بیان

چونکہ ع+بـ کا مکعب ہے $\text{ع}^3+3\text{ع}^2\text{بـ}+3\text{عبـ}^2+\text{بـ}^3$، تو ہمیں ایسا طریقہ چاہیے کہ جس سے جذر کی حدود ع و بـ معلوم کی جا سکیں جب کہ $\text{ع}^3+3\text{ع}^2\text{بـ}+3\text{عبـ}^2+\text{بـ}^3$ معلوم ہو۔

جذر مطلوب کی پہلی حد ع ہے جو جذر مکعب ہے ع^3 کا

حدود کو ایک حرف ع کی اقدار کے مطابق مرتب کرو، تو پہلی حد ہوگی ع^3

و اس کا جذرِ مکعب ہوگا ع جسے جذر مطلوب کی پہلی حد بناو، پھر

عبارت میں سے ع^3 کو کم کر دو تو بقیہ ہوگا

3ع^{2}بـ+3عبـ^2+بـ^3 یا (3ع^2+3عبـ+بـ^2)×بـ

یعنی اگر بقیہ 3ع^2+3عبـ+بـ^2 سے تقسیم کیا جائے تو حاصل ہوگا بـ جو جذر

مطلوب کی دوسری حد ہے۔

بہر حال یہ مقسوم بہ تین حدودو کو متضمن ہوگا

1. ع جو جذر مطلوب کی معلوم ہو جکی حد ہے، اس کے مربع کے تین گنا کو یعنی 3(ع^2)
2. معلوم ہو چکی پہلی حد ع و جدید حد بـ کے حاصل ضرب کے تین گنا کو یعنی 3(ع×بـ)
3. جدید حد بـ کے مربع کو یعنی بـ^2

عمل درج آگے مذکور طور پہ مرتب ہوگا ہے:

$$ع+ب$$

$$ع^3 + 3ع^2ب + 3عب^2 + ب^3$$

$$ع^3$$

$$3ع^2ب + 3عب^2 + ب^3$$

$$ع^2 \times 3 = 3ع^2$$

$$ع \times ب \times 3 = 3عب$$

$$ب^2 = ب^2$$

$$3ع^2 + 3عب + ب^2$$

$$3ع^2ب + 3عب^2 + ب^3$$

مثال اول: $8س^3-36س^2ف+54سف^2-27ف^3$ کا جذر مکعب بتاو۔

$$2س - 3ف$$

$$8س^3 - 36س^2ف + 54سف^2 - 27ف^3$$

$$8س^3$$

$$- 36س^2ف + 54سف^2 - 27ف^3$$

$$(2س)^2 \times 3 = 12س^2$$

$$2س \times -3ف \times 3 = -18سف$$

$$(-3ف)^2 = 9ف^2$$

$$12س^2 - 18سف + 9ف^2$$

$$- 36س^2ف + 54سف^2 - 27ف^3$$

مثال دوم: $27+108س+90س^2-80س^3-60س^4+48س^5-8س^6$ کا جذر مکعب بتاو۔

$^{2}ш2- ш4+ 3$

$^{6}ш8- {}^{5}ш48+ {}^{4}ш60- {}^{3}ш80- {}^{2}ш90+ ш108+ 27$

27

$^{3}ш80- {}^{2}ш90+ ш108+$

$27 = 3×{}^{2}3$

$ш36 = 3×ш4×3$

$^{2}ш16 = {}^{2}(ш4)$

$^{2}ш16+ ш36+ 27$

$^{3}ш64+ {}^{2}ш144+ ш108+$

$^{6}ш8- {}^{5}ш48+ {}^{4}ш60- {}^{3}ш144- {}^{2}ш54-$

$^{2}ш48+ ш72+ 27 = 3×{}^{2}(ш4+ 3)$

$^{3}ш24- {}^{2}ш18- = 3×({}^{2}ш2-)×(ш4 +3)$

$^{4}ш4 = {}^{2}({}^{2}ш2-)$

$^{4}ш4+ {}^{3}ш24- {}^{2}ш30+ ш72+ 27$

$^{6}ш8- {}^{5}ш48+ {}^{4}ш60- {}^{3}ш144- {}^{2}ш54-$

تفصیل: جب ہم جذر کی دو حدود یعنی $3+4س$ حاصل کر چکے تو جو باقی رہا وہ ہے $-54س^2-144س^3-60س^4+48س^5-8س^6$ ۔

اب حاصل ہو چکی جذر کے مربع کا تین گنا کیا و اس کے نتیجے $27+72س+48س^2$ کو جدید مقسوم بہ کا پہلا جز بنایا۔ و بقیہ کے پہلے جز $-54س^2$ کو مقسوم بہ کی پہلی حد 27 سے تقسیم کیا، تو جذر مطلوب کی اگلی حد معلوم ہو گئی یعنی $-2س^2$ ۔

مقسوم بہ کو تمام کرنے کے لیے $(3+4س)$ و $-2س^2$ کے حاصل ضرب کا تین گنا کیا، و $-2س^2$ کا مربع کیا۔

اب کل مقسوم بہ کو $-2س$ میں ضرب دیا و جو حاصل ہو اس کو بقیہ سے مفرق کیا، تو کچھ باقی نہ رہا و جذر مطلوب حاصل ہو گیا۔

123. یہاں ہم جذر مکعب کی ایسی مثال بیان کر رہے ہیں جس کی عبارات میں حدود مکسور واقع ہیں۔

مثال: $54 - 27س^3 + \frac{8}{س^6} - \frac{36}{س^3}$ کا جذر مکعب بتاو۔

عبارت کو اقدارِ س کی ترتیب صعودی پہ مرتب کیا

$$\frac{2}{\text{س}^2} - 3\text{س}$$

$$\frac{8}{\text{س}^6} - \frac{36}{\text{س}^3} + 54 - 27\text{س}^3$$

$$\frac{8}{\text{س}^6}$$

$$- \frac{36}{\text{س}^3} + 54 - 27\text{س}^3$$

$$3 \times \left(\frac{2}{\text{س}^2}\right)^2 = \frac{12}{\text{س}^4}$$

$$3 \times \frac{2}{\text{س}^2} \times (-3\text{س}) = -\frac{18}{\text{س}}$$

$$(-3\text{س})^2 = 9\text{س}^2$$

$$\frac{12}{\text{س}^4} - \frac{18}{\text{س}} + 9\text{س}^2 \qquad - \frac{36}{\text{س}^3} + 54 - 27\text{س}^3$$

124. عکس تضرب کا موضوع تمام کرنے سے قبل اس بات پہ تنبیہ کرنا مناسب ہے کہ حساب اساسی میں جذور مربع و مکعب حاصل کرنے کے عام قواعد حساب جبر کے ان طریقوں پہ مبنی ہیں جو موجودہ باب میں بیان کیے گئے ہیں۔

مثال اول: 5329 کا مربع بتاو

چونکہ 5329 درمیان میں ہے 4900 و 6400 کے یعنی $(70)^2$ و $(80)^2$ کے۔

تو اس کا جذر مربع متضمن ہے دو اعداد کو و درمیان ہے 70 و 80 کے۔ لہذا

مضمون 119 کے طریقۂ جبری میں جذر کی پہلی حد ع کے مطابق، ہم کو حاصل ہوا 70۔

درج ذیل مسائل میں تقابل کرنے سے حساب اساسی و حساب جبر کی مشابہت ظاہر ہوتی ہے۔

ع + ب

ع² + 2عب + ب²

ع²

2ع + ب | 2عب + ب²

2عب + ب²

73 = 3+70

5329

4900

143=3+140 | 429

429

مثال دوم: 53824 کا جذر مربع بتاو

53824 واقع ہے 40000 و 90000 کے درمیان جو 200² و 300² ہے۔

ع ب ج

232 = 2+30 + 200

53824

40000

13824

[2ع + ب] 430 = 30 + 400 | 12900

924

[2(ع + ب) + ج] 462 = 2 + 460 | 924

مثال سوم: 614125 کا جذر مکعب بتاو

چونکہ 614125 درمیان ہے 512000 و 729000 کے۔ یعنی 80^3 و 90^3۔

لہذا اس کا جذر مربع دو اعداد کو متضمن ہوگا و 80 و 90 کے درمیان واقع ہو گا۔

ع بؔ

$85 = 5 + 80$

		614125
		512000
[3ع^2]	$19200 = {}^{3}80 \times 3$	102125
[3عبؔ]	$1200 = 5 \times 80 \times 3$	
[بؔ^{2}]	$25 = 5 \times 5$	
	20425	102125

حساب اساسی میں نقوش عموماً حذف ہو جاتے ہیں، و قواعد جبری میں دیگر ترمیمات بھی ہوتی ہیں جن کو مکمل بیان کرنے کا یہ موقع نہیں ہے۔ ان کے متعلق بعض بیان باب انتیسویں میں آئے گا۔

باب سترہواں: تجزیہ

125. جب کوئی عبارتِ جبری دو یا زیادہ عبارات کا حاصل ضرب ہوتی ہے تو ان دونوں میں سے ہر ایک عبارت کو اس کا **جزّ ضربی** کہا جاتا ہے۔ و انہیں حاصل کرنے کو ہم عبارت کا اس کے اجزاء میں **تجزیۂ** کرنا کہیں گے۔
اس باب میں ہم وہ اساسی قواعد بیان کریں گے جن سے عبارت کا اس کے اجزاء میں تجزیہ متأثر ہوتا ہے۔

126. جب عبارت کی ہر حد کسی جز ضربی مشترک سے تقسیم ہو سکے، تو عبارت کی ہر حد کو جدا جدا اس جز ضربی مشترک سے تقسیم کر کے حاصل تقسیم کو چاندوں میں قید کیا جا سکتا ہے، و چاندوں کے قبل اس جز ضربی مشترک کو ضریب بنا کے لکھا جائے گا۔

مثال اول: عبارت $3\text{ع}^{2}-6\text{عب}$ کی حدود میں 3ع ایک جز ضربی مشترک ہے۔

$$\therefore\ 3\text{ع}^{2}-6\text{عب} = 3\text{ع}(\text{ع}-2\text{ب})$$

مثال دوم: $5\text{ع}^{2}\text{ب}\text{س}^{3}-15\text{عبس}^{2}-20\text{ب}^{3}\text{س}^{2} = 5\text{بس}^{2}(\text{ع}^{2}\text{س}-3\text{ع}-4\text{ب}^{2})$

127. عبارت جس میں چار حدود ہوں تو اس کا تجزیہ کبھی ان کو مناسب جوڑوں میں مرتب کر کے ہوتا کے۔

مثال اول: س^2-عس+بس-عب کا تجزیہ کرو

غور کرو کہ پہلی دو حدود میں س مشترک ہے و آخری دو میں ب مشترک ہے، تو ہم پہلی دو حدود کو ایک چاندے میں قید کریں گے و آخری دو کو دوسرے چاندے میں یعنی

س^2-عس+بس-عب = (س^2-عس)+(بس-عب)

= س(س-ع)+ب(س-ع) ....(1)

= (س-ع)(س+ب)

چونکہ (1) کا ہر چاندہ جزِ مشترک س-ع کو متضمن ہے۔

مثال دوم: 6س^2-9عس+4بس-6عب کا تجزیہ کرو

6س^2-9عس+4بس-6عب = (6س^2-9عس)+(4بس-6عب)

= 3س(2س-3ع)+2ب(2س-3ع)

= (2س-3ع) (3س+2ب)

مثال سوم: 12ع^2-4عب-3عس^2+بس^2 کا تجزیہ کرو

12ع^2-4عب-3عس^2+بس^2 = (12ع^2-4عب)-(3عس^2-بس^2)

= 4ع(3ع-ب)-س^2(3ع-ب)

= (3ع-ب) (4ع-س^2)

تنبیہ: پہلی سطر میں عموماً یہ دیکھنا کافی ہوتا ہے کہ ہر جوڑے میں کچھ جز ضربی مشترک ہوں۔ کوئی بھی مناسب مختار جوڑا ایک ہی نتیجہ دیتا ہے۔ لہذا آخری مثال میں ایک دوسری ترتیب سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$12ع^2-4عب-3عس^2+بس^2 = (12ع^2-3عس^2)-(4عب-بس^2)$$

$$= 3ع(4ع-س^2)-ب(4ع-س^2)$$

$$= (4ع-س^2)(3ع-ب)$$

نتیجہ: نتیجہ پہلے کے مثل آیا یعنی حاصل ضرب کے اجزاء ضربی میں ترتیب معتبر نہیں ہے۔

128. تجزیہ کے اگلے مسئلہ کے ذکر سے قبل طالب کو باب پانچویں کے مضمون 44 پہ نظر کرنے کی رائے دی جاتی ہے۔ جہاں اس چیز پہ توجہ دلائی گئی ہے کہ کیسے دو حدی عبارات کے ضرب کا نتیجہ حاصل کرنے کے لیے ان کی مختلف حدود کے ضریبات رقمی کو مرکب کیا جاتا ہے تاکہ ایک تین حدی نتیجہ حاصل ہو۔ تو مضمون 44 کے مطابق ہوا،

$$(س+5)(س+3) = س^2+8س+15 \quad .... (1)$$

$$(س-5)(س-3) = س^2-8س+15 \quad .... (2)$$

$$(س+5)(س-3) = س^2+2س-15 \quad .... (3)$$

$$(س-5)(س+3) = س^2-2س-15 \quad .... (4)$$

اب ہم تین حدی عبارت کے تجزیہ کا ذکر کر سکتے ہیں، جیسے وہ عبارات جو مذکور مساوات میں بائیں جانب واقع ہیں ان کا دو حدی اجزاء ضربی میں تجزیہ کرنا۔

نتائج مذکور کا معاینہ کر کے ہم نے پایا کہ

1. دونوں جز ضربی کی پہلی حد ﷲ ہے۔
2. دونوں اجزاء ضربی کی دوسری حد کا حاصل ضرب متساوی ہے تین حدی عبارت کی تیسری حد کے۔ مثال کے طور پہ (2) میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ 15 حاصل ضرب ہے -5 و -3 کا؛ جب کہ (3) میں -15 حاصل ضرب ہے +5 و -3 کا۔
3. دونوں اجزاء ضربی کی دوسری حد کا اجتماعِ جبری متساوی ہے تین حدی عبارت میں ﷲ کے ضریب رقمی کے۔ مثال کے طور پہ (4) میں -5 و +3 کا جمع نتیجہ دے گا -2 جو ﷲ کا ضریب رقمی ہے تین حدی عبارت میں۔

ان قواعد کی حاجات کو درج ذیل مثالوں سے با آسانی سمجھا جا سکتا ہے۔

مثال اول: ﷲ²+11ﷲ+24 کا تجزیہ کرو

اجزاء ضربی کی دوسری حدود ایسی ہونی چاہیے کہ ان کا حاصل ضرب +24 ہو و ان کا اجتماع +11 ہو۔ تو واضح ہے کہ وہ +8 و +3 ہوں گے۔

∴ ﷲ²+11ﷲ+24 = (ﷲ+8)(ﷲ+3)

مثال دوم: $س^2-10س+24$ کا تجزیہ کرو

اجزاء ضربی کی دوسری حدود ایسی ہونی چاہیے کہ ان کا حاصل ضرب +24 ہو، و اجتماع -10 ہو۔ لہذا وہ دونوں سلبی ہوں گے، و یہ جاننا آسان ہے کہ وہ -6 و -4 ہوں گے۔

$$\therefore س^2-10س+24 = (س-6)(س-4)$$

مثال سوم: $س^2-18س+81 = (س-9)(س-9) = (س-9)^2$

مثال چہارم: $س^4+10س^2+25 = (س^2+5)(س^2+5) = (س^2+5)^2$

مثال پنجم: $س^2-11عس+10ع^2$ کے اجزاء ضربی بتاو

اجزاء ضربی کی دوسری حدود ایسی ہونی چاہیے جن کا حاصل ضرب $+10ع^2$ ہو، و اجتماع -11ع . لہذا وہ -10ع و -ع ہوں گی۔

$$\therefore س^2-11عس+10ع^2 = (س-10ع)(س-ع)$$

تنبیہ: ایسے مسائل میں طالب کو اپنا نتیجہ ہمیشہ جانچ لینا چاہیے، ذہن میں ان اجزاء ضربی کا حاصل ضرب قائم کر کے، جو اس نے فرض کیا ہے۔ و اس کا طریقہ پانچویں باب میں گزر چکا ہے۔

129. اب ایسے مسائل ذکر کریں گے جن میں تین حدی عبارت کی تیسری حد سلبی ہو۔

مثال اول: $س^2+2س-35$ کا تجزیہ کرو

اجزاء ضربی کی دوسری حدود ایسی ہونی چاہیے کہ ان دونوں کا حاصل ضرب -35 ہو و ان کا اجتماعِ جبری +2۔ لہاذ ان کی علامات مختلف ہونی چاہیے و ان میں سے اعلی ایجابی ہونی چاہیے تاکہ اجتماع ایجابی ہو۔

لہذا ان کی حدودِ مطلوب ہوئیں +7 و -5۔

$$\therefore س^2+2س-35 = (س+7)(س-5)$$

مثال دوم: $س^2-3س-54$ کا تجزیہ کرو

اس میں اجزاء ضربی کی دوسری حدود ایسی ہونی چاہیے کہ ان کا حاصل ضرب -54 ہو و ان کا اجتماعِ جبری -3۔ لہذا ان کی علامات مختلف ہونی چاہیے، و ان میں سے اعلی سلبی ہونی چاہیے تاکہ ان کا اجتماع سلبی ہو۔

لہذا ان کی حدود مطلوب ہوئیں -9 و +6۔

$$\therefore س^2-3س-54 = (س-9)(س+6)$$

دھیان رہے کہ ان مسائل میں مقادیرِ عددی کی علامات مختلف ہوں گی۔ و اگر مناسب ہو تو درج ذیل طریقہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔

مثال سوم: $سۂ^2+23سۂ-420$ کا تجزیہ کرو

اولا دو اعداد بتاو جن کا حاصل ضرب 420 ہو و جن کا فرق 23 ہو۔ و وہ ہیں 35 و 12؛ لہذا ہمیں ایسی علامت استعمال کرنا ہے کہ ایجاب غالب ہو جائے تو ہوگا

∴ سفؔ^{2}+23سفؔ-420 = (سفؔ+35)(سفؔ-12)

130. اب ہم اس تین حدی عبارت کا تجزیہ کریں گے جس کی سب سے بڑی قدر والے حرف کا ضریب رقمی 1 نہ ہو۔

پھر سے، باب پانچویں کے مضمون 44 کے مطابق ہم درج ذیل نتائج تحریر کرتے ہیں

(3س+2)(س+4) = 3س^2+14س+8 ......(1)

(3س-2)(س-4) = 3س^2-14س+8 ......(2)

(3س+2)(س-4) = 3س^2-10س-8 ......(3)

(3س-2)(س+4) = 3س^2+10س-8 ......(4)

عام قاعدہ وضع کرنے سے قبل ہم مذکورہ دو مساوات کا معاینہ کریں گے۔

غور کرو کہ 3س^2-14س+8 = (3س-2)(س-4)

پہلی حد 3س^2 حاصل ضرب ہے 3س و س کا

تیسری حد +8 حاصل ضرب ہے -2 و -4 کا

و درمیانی حد -14س نتیجہ ہے دو حواصل ضرب 3س×-4 و س×-2 کے جمع کا۔

و غور کرو کہ $3س^2-10س-8 = (3س+2)(س-4)$

پہلی حد $3س^2$ حاصل ضرب ہے 3س و س کا

تیسری حد -8 حاصل ضرب ہے +2 و -4 کا

درمیانی حد -10س نتیجہ ہے دو حواصل ضرب 3س×-4 و س×2 کے جمع کا؛ و اس کی علامت سلبی ہے کیونکہ دونوں میں سے بڑا سلبی ہے۔

131. مبتدی کو مناسب اجزاء ضربی اختیار کرنے میں دشواری ہوتی ہے۔ خالص مشق سے ہی ممکن ہے کہ وہ اولِ نظر میں بتا سکے کہ کیا اس کا فرض کیا ہوا جوڑا مرکب ہونے پہ تجزیہ کی جانے والی عبارت کا درست ضریب دے سکے گا۔

مثال: $7س^2-19س-6$ کا تجزیہ کرو

پہلی کوشش میں (7س 3)(س 2) لکھو و دھیان رہے کہ 3 و 2 کی علامات مختلف ہوں گی۔ ان اجزاء سے $7س^2$ و -6 حاصل ہوگا جو کہ پہلی و تیسری حدود ہیں۔ لیکن $7×2 - 3×1 = 11$، اس ترکیب سے درست درمیانی حد حاصل نہیں ہوئی۔

تو اب (7س 2)(س 3) کیا

چونکہ $7×3 - 1×2 = 19$

یہ اجزاء ضربی درست ہوں گے اگر ہم اس طور پہ علامات وضع کریں کہ سلب غالب ہو جائے۔

لہذا $7س^2-19س-6 = (7س+2)(س-3)$

ذہن میں عمل ضرب کر کے جانچ لو۔

132. عمل کے دوران ان تمام اقدام کو تحریر کرنا لازم نہیں ہے۔ عن قریب طالب جان لے گا کہ بعض مسائل جلدی سے جانچے جا سکتے ہیں و غیر مناسب ترکیبات کو ایک دفع میں رد کیا جا سکتا ہے۔

یہاں دو اہم نقطے درج ذیل ہیں جنہیں غور سے سمجھنا چاہیے۔

1. اگر دو حدی عبارت کی تیسری حد ایجابی ہو تو اس کے دونوں اجزاء ضربی کی دوسری حدود کی علامات یکساں ہوں گی، و یہ علامت تین حدی عبارت کی درمیانی حد کی علامت کے مثل ہوگی۔
2. اگر تین حدی عبارت کی تیسری حد سلبی ہو تو اس کے اجزاء ضربی کی دوسری حدود کی علامات مختلف ہوں گی۔

مثال اول: $14س^2+29س-15$ ....(1)

$14س^2-29س-15$ ....(2)

دونوں مسئلہ میں ہم پہلی کوشش میں $(7س \quad 3)(2س \quad 5)$ تحریر کر سکتے ہیں، اس بات کا خیال رکھتے ہوئے کہ 3 و 5 کی علامات لازماً مختلف ہوں گی۔ و چونکہ $7\times5 - 3\times2 = 29$، تو اب ہمیں ہر جز ضربی میں مناسب علامت وضع کرنا ہے۔

و (1) میں علامت ایجابی غالب ہونی چاہیے و (2) میں علامت سلبی۔

لہذا 14س^{2}+29س-15=(7س-3)(2س+5)

14س^{2}-29س-15=(7س+3)(2س-5)

مثال دوم: 5س^{2}+17س+6 ....(1)

5س^{2}-17س+6 ....(2)

ہم نے دیکھا کہ (1) میں جن اجزا ضربی سے 6 حاصل ہوا وہ دونوں ایجابی ہیں و (2) میں سلبی ہیں۔

لہذا (1) کے لیے ہم تحریر کر سکتے ہیں (5س+)(س+)

و (2) کے لیے (5س-)(س-)

و چونکہ (5×3)+(1×2) = 17، ہم دیکھ سکتے ہیں۔

5س^{2}+17س+6 = (5س+2)(س+3)

5س^{2}-17س+6 = (5س-2)(س-3)

تنبیہ: دونوں عبارات میں تیسری حد 6 کا جز 1 و 6 بھی ہو سکتے ہیں۔ لیکن یہ ان مسائل میں سے ہے جن کو طالب غیر مناسب سمجھ کے رد کر دیگا۔

مثال سوم: 9س^{2}-48سف+64ف^{2} = (3س-8ف)(3س-8ف)

= (3س-8ف)^{2}

مثال چہارم: $6+7س-5س^2 = (3+5س)(2-س)$

133. ء+ب کو ء-ب سے ضرب دے کے ہم نے حاصل کیا

$$(ء+ب)(ء-ب) = ء^2-ب^2$$

جس کی لفظی تعبیر درج ذیل ہے

کسی بھی دو مقادیر کے اجتماع و فرق کا حاصل ضرب متساوی ہوتا ہے ان دونوں کے مربعات کے فرق کے۔

اس کے بر عکس، کسی بھی دو مقادیر کے مربعات کا فرق متساوی ہوتا ہے ان دونوں کے اجتماع و فرق کے حاصل ضرب کے۔

لہذا کوئی بھی عبارت جو دو مربعات کا فرق ہو اس کا اجزاء ضربی میں ایک دفعہ میں تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔

مثال: $25س^2-16ف^2$ کا تجزیہ کرو

$$25س^2-16ف^2 = (5س)^2-(4ف)^2$$

لہذا پہلی حد 5س و 4ف کا اجتماع ہوئی و دوسری حد 5س و 4ف کا فرق ہوئی

$$\therefore\ 25س^2-16ف^2 = (5س+4ف)(5س-4ف)$$

عموما درمیان کے اقدام حذف کر دیے جاتے ہیں۔

مثال: 1-49ج^{6} = (1+7ج^{3})(1-7ج^{3})

دو مقدار عددی کے مربعات کا فرق کبھی درج ذیل فارمولہ سے بآسانی معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ع^{2}-بـ^{2} = (ع+بـ)(ع-بـ)

مثال: (329)^{2}-(171)^{2} = (329+171)(329-171)

= 500 × 158

= 79000

134. جب ایک یا دونوں مربعات مقدار مرکب ہوں تب بھی یہی طریقہ کارگر ہوگا۔

مثال اول: (ع+2بـ)^{2}-16س^{2} کا تجزیہ کرو

ع+2بـ و 4س کا اجتماع ہوا ع+2بـ+4س

و ان کا فرق ہوا ع+2بـ-4س

∴ (ع+2بـ)^{2}-16س^{2} = (ع+2بـ+4س)(ع+2بـ-4س)

مثال دوم: س^{2}-(2بـ-3ج)^{2} کا تجزیہ یہ کرو

س و 2بـ-3ج کا اجتماع ہوا س+2بـ-3ج

و ان کا فرق ہے س-(2بـ-3ج) = س-2بـ+3ج

∴ س^{2}-(2بـ-3ج)^{2} = (س+2بـ-3ج)(س-2بـ+3ج)

اگر اجزاء ضربی حدود متشابہ کو متضمن ہو تو انہیں ایک ساتھ اکٹھا کر لیا جائے تاکہ نتیجہ صورت بسیط میں آئے۔

مثال سوم: $(3س+7ف)^2-(2س-3ف)^2$

$$= \{(3س+7ف)+(2س-3ف)\}\{(3س+7ف)-(2س-3ف)\}$$

$$= (3س+7ف+2س-3ف)(3س+7ف-2س+3ف)$$

$$= (5س+4ف)(س+10ف)$$

135. مناسب گروہ بندی کر کے عباراتِ مرکب کو دو مربعات کے فرق کے طور پہ تعبیر کیا جا سکتا ہے، پھر اس کا تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: $ع^2-2عس+س^2-4ب^2$ کا تجزیہ کرو

$$ع^2-2عس+س^2-4ب^2 = (ع^2-2عس+س^2) - 4ب^2$$

$$= (ع-س)^2 - (2ب)^2$$

$$= (ع-س+2ب)(ع-س-2ب)$$

مثال دوم: $9ع^2-ج^2+4جس-4س^2$ کا تجزیہ کرو

$$9ع^2-ج^2+4جس-4س^2 = 9ع^2-(ج^2-4جس+4س^2)$$

$$= (3ع)^2 - (ج-2س)^2$$

$$= (3ع+ج-2س)(3ع-ج+2س)$$

مثال سوم: 12سف+25-4س^{2}-9ف^{2} کا تجزیہ کرو

12سف+25-4س^{2}-9ف^{2} = 25-(4س^{2}-12سف+9ف^{2})

= (5)^{2}-(2س-3ف)^{2}

= (5+2س-3ف)(5-2س+3ف)

مثال چہارم: 2بض-ع^{2}-ج^{2}+ب^{2}+ض^{2}+2عج کا تجزیہ کرو

یہاں 2بض و 2عج اولا عبارت کی ترتیب کا تقاضا کر رہے ہیں۔

2بض-ع^{2}-ج^{2}+ب^{2}+ض^{2}+2عج = ب^{2}+2بض+ض^{2}-ع^{2}+2عج-ج^{2}

= ب^{2}+2بض+ض^{2}-(ع^{2}-2عج+ج^{2})

= (ب+ض)^{2}-(ع-ج)^{2}

= (ب+ض+ع-ج) (ب+ض-ع+ج)

136. اگر ہم ع^{3}+ب^{3} کو ع+ب سے تقسیم کریں تو حاصل آئے گا ع^{2}-عب+ب^{2} و اگر ع^{3}-ب^{3} کو ع-ب سے تقسیم کریں تو آئے گا ع^{2}+عب+ب^{2}.

اس سے ہمیں درج ذیل مساوات حاصل ہوئیں۔

ع^{3}+ب^{3} = (ع+ب)(ع^{2}-عب+ب^{2})

ع^{3}-ب^{3} = (ع-ب)(ع^{2}+عب+ب^{2})

یہ نتائج بہت اہم ہیں و ہم کو کسی بھی ایسی عبارت کی تجزیہ کرنے پہ قادر بناتے ہیں جو دو مکعبات کے اجتماع یا فرق کی صورت میں تعبیر کی جا سکے۔

مثال اول: $8س^{3}-27ف^{3} = (2س)^{3}-(3ف)^{3}$

$$= (2س-3ف)(4س^{2}+6سف+9ف^{2})$$

تنبیہ: درمیانی حد $6سف$ حاصل ضرب ہے $2س$ و $3ف$ کا۔

مثال دوم: $64ع^{3}+1 = (4ع)^{3}+1^{3}$

$$= (4ع+1)(16ع^{2}-4ع+1)$$

ہم عموما درمیان کے اقدام حذف کر کے ایک دفعہ میں اجزاء ضربی تحریر کرتے ہیں۔

(1) $343ع^{6}-27س^{3} = (7ع^{2}-3س)(49ع^{4}+21ع^{2}س+9س^{2})$

(2) $8س^{9}+729 = (2س^{3}+9)(4س^{6}-18س^{3}+81)$

137. اس باب کو ختم کرنے سے قبل ہم تجزیہ کے متفرق مسائل بیان کریں گے۔

مثال اول: $16ع^{4}-81ب^{4}$ کا تجزیہ کرو

$$16ع^{4}-81ب^{4} = (4ع^{2}+9ب^{2})(4ع^{2}-9ب^{2})$$

$$= (4ع^{2}+9ب^{2})(2ع+3ب)(2ع-3ب)$$

مثال دوم: $س^6-ف^6$ کا تجریہ کرو

$$س^6-ف^6 = (س^3+ف^3)(س^3-ف^3)$$

$$= (س+ف)(س^2-سف+ف^2)(س-ف)(س^2+سف+ف^2)$$

تنبیہ: جب عبارت کو دو مربّعات کے فرق کی صورت میں تعبیر کیا جا سکے یا دو مکعّبات کے فرق کی صورت میں تعبیر کیا جا سکے، تو مضمون 133 و 136 میں بیان کردہ طریقوں میں سے ہر ایک استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ لیکن دو مربعات کے فرق کا تجزیہ کرنے کے قاعدے کو پہلے استعمال کرنا زیادہ سہل ہے۔

و جب تجزیہ کی جانے والی عبارت ایسے جز ضربی کو ضمن میں لیے ہو جو اس کی ہر حد میں مشترک ہو تو اس کو مضمون 126 میں بیان کردہ قاعدے کے مطابق چاندے کے باہر تحریر کرنا چاہیے۔

مثال سوم: $28س^4ف+64س^3ف-60س^2ف$ کا تجزیہ کرو

$$28س^4ف+64س^3ف-60س^2ف = 4س^2ف(7س^2+16س-15)$$

$$= 4س^2ف(7س-5)(س+3)$$

مثال چہارم: $س^3ض^2-8ف^3ض^2-4س^3ک^2+32ف^3ک^2$ کا تجزیہ کرو

$$= ض^2(س^3-8ف^3)-4ک^2(س^3-8ف^3)$$

= (س^3-8ف^3)(ض^2-4ک^2)

= (س-2ف)(س^2+2سف+4ف^2)(ض+2ک)(ض-2ک)

مثال پنجم: 4س^2-25ف^2+2س+5ف کا تجزیہ کرو

4س^2-25ف^2+2س+5ف = (2س+5ف)(2س-5ف)+2س+5ف

= (2س+5ف)(2س-5ف+1)

باب اٹھارہواں: اعلی جز ضربی مشترک

138. ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ کیسے محض معاینہ کر کے ہم دو یا زیادہ عبارات بسیط کا اعلی جز ضربی مشترک معلوم کر سکتے ہیں [مضمون 89 و 90 دیکھو]۔ اسی کے مثل ایک طریقہ ہےجو ہمیں ایسی عبارتِ مرکب کا اعلی جز ضربی مشترک حاصل کرنے پہ قادر بناتا ہے جو اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں تعبیر ہو، یا بآسنی اس کو اجزاء ضربی میں متجزیٰ کیا جا سکتا ہو۔

مثال اول: $4جس^3$ و $2جس^3+4ج^2س^2$ کا اعلی جز ضربی مشترک بتاؤ

اگر اس عبارت کو درج ذیل صورت پہ تعبیر کیا جائے تو اجزاء ضربی مشترک اخذ کرنا آسان ہو جائے گا۔

$4جس^3 = 4جس^3$

$2جس^3+4ج^2س^2 = 2جس^2(س+2ج)$

لہذا اعلی جز ضربی مشترک ہوا $2جس^2$

مثال دوم: $3ع^2+9عب$ ، $ع^3-9عب^2$ ، $ع^3+6ع^2ب+9عب^2$ کا ترجزیہ کرو

تمام عبارات کا تجزیہ کرنے یہ ہم نے پایا

$3ع^2+9عب = 3ع(ع+3ب)$

$ع^3-9عب^2 = ع(ع+3ب)(ع-3ب)$

$ع^3+6ع^2ب+9عب^2 = ع(ع+3ب)(ع+3ب)$

لہذا اعلی جز ضربی مشترک ہوا ع(ع+3ب)

139. جب دو یا زیادہ عبارات ایک ہی **جز ضربیٔ مرکب** کی مختلف اقدار کو متضمن ہوں، تو طالب کو اس بات کا خصوصی دھیان رکھنا چاہیے کہ اعلی جز ضربی مشترک جز ضربی مرکب کی اس سب سے بڑی قدر کو ضرور ضمن میں لیے ہوگا جو تمام عبارات مذکورہ میں مشترک ہو۔

مثال اول: $س(ع-س)^2$ ، $ع(ع-س)^3$ ، $2عس(ع-س)^5$ کا اعلی جز ضربی مشترک ہوا $(ع-س)^2$

مثال دوم: $عس^2+2ع^2س+ع^3$ ، $2عس^2-4ع^2س-6س^3$ ، $3(عس+ع^2)^2$ کا اعلی جز ضربی مشترک بتاؤ

عبارت کا تجزیہ کیا تو پایا

$عس^2+2ع^2س+ع^3 = ع(س^2+2عس+ع^2)$

$= ع(س+ع)^2$ ....(1)

$2عس^2-4ع^2س-6ع^3 = 2ع(س^2-2عس-3ع^2)$

$= 2ع(س+ع)(س-3ع)$ ....(2)

$3(عس+ع^2)^2 = 3ع^2(س+ع)^2$ ....(3)

لہذا (1)، (2)، (3) سے ہم نے پایا کہ اعلی جز ضربی مشترک ع(س+ع) ہے۔

140. ایسا عموماً ہوتا ہے کہ عبارت کا آسانی سے تجزیہ نہیں ہو پاتا۔ اس حال میں ہم وہ طریقہ اختیار کرتے ہیں جو حساب اساسی میں دو یا زیادہ اعداد کا اعلی مقدار مشترک حاصل کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔

سہولت کے لیے ہم یہاں مضمون 88 کی تعریف دوہرا رہے ہیں۔
تعریف: دو یا زیادہ عبارات جبری کا اعلی جز ضربی مشترک وہ سب سے زیادہ درجہ کی عبارت ہے جو ان میں سے ہر ایک کو بلا بقیہ کے تقسیم کرے۔

141. اب ہم اعلی جز ضربی مشترک حاصل کرنے کے طریقۂ جبری کی مثال بیان کریں گے اس کے قواعد کے مکمل ثبوت کے بیان کو مؤخّر کرتے ہوئے۔ لیکن دو اصول ذکر کرتے ہیں جنہیں طالب کو مثالیں پڑھنے کے دوران ذہن میں رکھنا ہے۔

1. اگر عبارت کسی جز ضربی کو متضمن ہے، تو اس عبارت کا کوئی بھی حاصل ضربی اس جز ضربی سے تقسیم ہو سکتا ہے۔
2. اگر دو عبارات میں کوئی جز ضربی مشترک ہو تو وہ ان دونوں کے اجتماع و ان کے فرق کو تقسیم کرے گا، و ایسے ہی ان کے کسی بھی حاصل ضربی کے اجتماع و فرق کو تقسیم کرے گا۔

مثال: $4س^3-3س^2-24س-9$ و $8س^3-2س^2-53س-39$ کا اعلی جز ضربی مشترک بتاو۔

س	$4س^3 - 3س^2 - 24س - 9$	$8س^3 - 2س^2 - 53س - 39$	2
	$4س^3 - 5س^2 - 21س$	$8س^3 - 6س^2 - 48س - 18$	
2س	$2س^2 - 3س - 9$	$4س^2 - 5س - 21$	2
	$2س^2 - 6س$	$4س^2 - 6س - 18$	
3	$3س - 9$	$س - 3$	
	$3س - 9$		

تو اعلی جز ضربی مشترک ہوا س-3۔

تفصیل: اولاً عبارات مذکور کو س کی اقدار کے اعتبار سے ترتیب نزولی پہ مرتب کیا۔ تو جو عبارات مرتب ہوئیں ان کی پہلی حدود یکساں درجہ کہ ہیں۔ پھر ان دونوں حدود میں سے جس کا ضریب رقمی کم تھا اس کی عبارت کو مقسوم بہ بنایا، پھر مسئلہ کو متوازیا مرتب کیا جیسے کی گزرا۔ جب پہلے بقیہ $4س^2-5س-21$ کو مقسوم بہ بنایا تو حاصل تقسیم س کو ہم نے مقسوم کے داہنے جانب وضع کیا۔ ایسے ہی جب دوسرے بقیہ $2س^2-3س-9$ کو مقسوم بہ بنایا تو حاصل تقسیم 2 کو بائیں جانب وضع کیا، وغیرہ۔ و آخری مقسوم بہ س-3 اعلی جز ضربی مشترک ہوا جو کہ مطلوب تھا۔

142. اس طریقہ سے خالص اعلی جز ضربی مشترک کے جز ضربی مرکب کو ہی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ لہذا لازم ہے کہ اولاً عبارات میں سے اجزاء ضربی بسیط کو ساقط کیا جائے، و اگر ان میں ان کا اعلی جز ضربی مشترک موجود ہو تو اس کو قاعدے کے مطابق ضربی مرکب میں ضرب دیا جائے۔

مثال: $24س^4-2س^3-60س^2-32س$ و $18س^4-6س^3-39س^2-18س$ کا اعلی جز ضربی مشترک بتاو۔

$24س^4-2س^3-60س^2-32س = 2س(12س^3-س^2-30س-16)$

$18س^4-6س^3-39س^2-18س = 3س(6س^3-2س^2-13س-6)$

ایسے ہی 2س و 3س میں س جز ضربی مشترک ہے۔ تو جز ضربی بسیط 2س و 3س کو ساقط کر دیا، و ان کے مشترک جز ضربی س کو محفوظ کر لیا۔

اب مضمون 141 کے مثل حل کریں گے۔

2	$12س^3 - س^2 - 30س - 16$	$6س^3 - 2س^2 - 13س - 6$	2س
	$12س^3 - 4س^2 - 26س - 12$	$6س^3 - 8س^2 - 8س$	
س	$3س^2 - 4س - 4$	$6س^2 - 5س - 6$	2
	$3س^2 + 2س$	$6س^2 - 8س - 8$	
2-	$-6س - 4$	$3س + 2$	
	$-6س - 4$		

تو اعلی جز ضربی مشترک ہوا $س(3س+2)$۔

143. اب تک جو عبارات جبری ہم نے ذکر کیا ان پہ حساب اساسی کا طریقہ بالکل جاری ہے۔ لیکن بعض مسائل میں حساب اساسی کے اس طریقہ میں بعض ترمیم کرنا پڑتا ہے۔ جس کی مزید تفہیم کے لیے اس بات کو دھیان میں رکھنا چاہیے کہ عمل کے ہر قدم پہ جو بقیہ آتا ہے اس میں اس کے جز ضربی کے طور پہ وہ اعلی جز ضربی مشترک موجود ہوتا ہے جو ہمارا مطلوب ہے۔ [مضمون 141 کا 1، 2 دیکھو]

مثال اول: $3س^3-13س^2+23س-21$ و $6س^3+س^2-44س+21$

$$
\begin{array}{r|l|l}
3س^3 - 13س^2 + 23س - 21 & 6س^3 + س^2 - 44س + 21 & 2 \\
 & \underline{6س^3 - 26س^2 + 46س - 42} & \\
 & 27س^2 - 90س + 63 &
\end{array}
$$

یہاں $27س^2-90س+63$ کو مقسوم بہ بنایا تو پایا کہ یہ

$3س^3-13س^2+23س-21$ میں صحیح حاصل تقسیم کے ساتھ شامل نہیں

ہے۔ لیکن غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ $27س^2-90س+63$ کو

$9(3س^2-10س+7)$ کی صورت میں تحریر کر سکتے ہیں۔ و معلوم ہے کہ

عمل کے دوران ہر قدم میں واقع ہونے والے بقیات اعلی جز ضربی مشترک

کو ضمن لیے ہوتے ہیں۔ تو ہم کہ سکتے ہیں کہ وہ اعلی جز ضربی مشترک

جو ہمارا مطلوب ہے $9(3س^2-10س+7)$ میں شامل ہے۔ لیکن دونوں عبارات

مذکور میں کوئی بھی جز ضربی بسیط نہیں ہے، لہذا ان کا اعلی جز ضربی

مشترک کوئی نہیں ہو سکتا۔ لہذا ہم جز ضربی 9 کو رد کرتے ہیں و

$3س^2-10س+7$ کے ساتھ آگے بڑھتے ہیں۔

س	3س² - 10س + 7	3س³ - 13س² + 23س - 21	س
	3س² - 7س	3س³ - 10س² + 7س	
1-	- 3س + 7	- 3س² + 16س - 21	1-
	- 3س + 7	- 3س² + 10س - 7	
		2) 6س - 14	
		3س - 7	

تو اعلی جز ضربی مشترک ہوا 3س-7۔

جز ضربی 2 کو جز ضربی 9 کے مثل ساقط کر دیا۔

مثال دوم: درج دیل عبارات کا اعلی جز ضربی مشترک بتاو۔

2س³+س²-س-2 ....(1)

و 3س³-2س²+س-2 ....(2)

جیسا کہ عبارات سے ظاہر ہے کہ ہم مکسوری حاصل تقسیم استعمال کیے بنا ایک عبارت کو دوسری سے تقسیم نہیں کر سکتے۔ لیکن یہ مشکل ایک مناسب جز ضربی قائم کر کے دفع کی جا سکتی ہے؛ جیسا کہ گزشتہ مثال میں ہم نے ایک جز ضربی کو ساقط کر دیا تھا جب عام طریقہ سے تقسیم نہیں کر پا رہے تھے۔ یہاں عباراتِ مذکور میں کوئی مشترک جز ضربی بسیط نہیں ہے، لہذا اگر ہم ان میں سے کسی میں بھی کوئی جز بسیط ضرب دے دیں تو ان کا اعلی جز ضربی مشترک متأثر نہیں ہوگا۔

عبارت (2) میں 2 کو ضرب دو و عبارت (1) کو مقسوم بہ کے طور پہ استعمال کرو۔

3	6س^3 - 4س^2 + 2س - 4	2س^3 + س^2 - س - 2	
	6س^3 + 3س^2 - 3س - 6	7 ×	
	-7س^2 + 5س + 2	14س^3 + 7س^2 - 7س - 14	-2س
	17 ×	14س^3 - 10س^2 - 4س	
-7	-119س^2 + 85س + 34	17س^2 - 3س - 14	17س
	-119س^2 + 21س + 98	17س^2 - 17س	
	64) 64س - 64	14س-14	14
	س - 1	14س-14	

تو اس کا اعلی جز ضربی مشترک ہوا س-1۔

پہلی تقسیم کے بعد جز ضربی 7 کو قائم کیا کیونکہ پہلا بقیہ -7س^2+5س+2، 2س^3+س^2-س-2 کو تقسیم نہیں کر سکتا۔ پھر اگلے قدم میں جز ضربی 17 کو ایسی ہی وجہ سے قائم کیا و آخر میں جز ضربی 64 کو ساقط کیا جس کی وجہ مثال اول میں بیان ہے۔

144. آخر کی دو مثالوں سے معلوم ہوا کہ ہم عبارات مذکور میں سے کسی ایک کو، و ایسے ہی عمل میں واقع ہونے والے کسی بھی بقیہ کو، ایسے جز ضربی سے ضرب و تقسیم کر سکتے ہیں جو دونوں عباراتِ مذکور کو تقسیم نہ کرتا ہو۔

145. مضمون 143 کی مثال دوم کی دو عبارات کو ذرج ذیل صورت میں تحریر کر سکتے ہیں

$2س^3+س^2-س-2 = (س-1)(2س^2+3س+2)$

$3س^3-2س^2+س-2 = (س-1)(3س^2+س+2)$

تو ان کا اعلی جز ضربی مشترک ہوا س-1، و لہذا $2س^2+3س+2$ و $3س^2+س+2$ میں کوئی بھی جبری مشترک مقسوم بہ نہیں ہے۔ لیکن اگر ہم س=6 کر دیں، تو

$2س^3+س^2-س-2 = 460$،

و $3س^3-2س^2+س-2 = 580$؛

و 460 و 580 کی اعلی مقدار مشترک 20 ہے، جب کہ 5 قیمتِ عددی ہے س-1 کی جو کہ جبری اعلی جز ضربی مشترک ہے۔ لہذا اس مسئلہ میں جبری اعلی جز ضربی مشترک و اساسی اعلی مقدار مشترک کی قیمت عددی متساوی نہیں ہیں۔

اس کی وجہ یہ ہے کہ جب س=6 تو عبارات $2س^2+3س+2$ و $3س^2+س+2$ متساوی ہوئیں 92 و 116 کے، جن کا اساسی جز ضربی مشترک 4 ہے، جب کہ ان عبارات میں جبری جز ضربی مشترک کچھ نہیں ہے۔

لہذا ایسا برابر ہوتا ہے کہ دو عبارات کا اعلی جز ضربی مشترک و ان کی عددی اعلی مقدار مشترک، جب کہ حروف کے لیے قیمت متعین ہو، متساوی نہیں ہوتے۔ یہی وجہ ہے کہ جبری مقادیر کے لیے "اعلی مقدار مشترک" استعمال کرنا غیر مناسب ہے۔

146. مضمون 141 کی عبارات کو درج ذیل طور پہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

1. اگر ف سے ب تقسیم ہوگا تو مب بھی تقسیم ہوگا۔

فرض کرو کہ ب=بـف، تو ہوا مب=مبـف

لہذا ف جز ضربی ہوا مب کا۔

2. اگر ف سے ب و ج تقسیم ہوگا، تو م-ب±نـج بھی تقسیم ہوگا۔

فرض کرو ب=بـف، ج=جـف

تو مب±نـج = مبـف±نـجـف = ف(مبـ±نـجـ)

لہذا ف نے مب±نـج کو تقسیم کیا۔

147. اب ہم دو عبارات جبری کا اعلی جز ضربی مشترک حاصل کرنے کے قواعد بیان و ثابت کریں گے۔

تو ہم کہتے ہیں کہ اگر عبارت میں کوئی جز ضربی بسیط موجود ہو تو پہلے اسے ساقط کرنا چاہیے۔ [مضمون 142 کی مثال دیکھو]

فرض کرو کہ جز ضربی بسیط کے ساقط ہونے کے بعد ء و ب دو عبارات ہوئیں، اب انہیں کسی حرف مشترک کی قدر کی ترتیبِ صعودی یا نزولی پہ مرتب کرو، و ب میں اس حرف کی اعلی قدر، ء میں اس کی اعلی قدر سے کم نہیں ہونی چاہیے۔

ب کو ء سے تقسیم کرو؛ و فرض کرو کہ س حاصل تقسیم ہے و ج بقیہ ہے۔ و فرض کرو کہ ج میں ہ ایک جز ضربی بسیط ہے۔ پھر اس جز ضربی کو ساقط کرو تا کہ ایک جدید مقسوم بہ د حاصل ہو۔ اب فرض کرو کہ ء کو د سے تقسیم ہونے لائق بنانے کے لیے لازم ہے کہ ء کو ایک جز ضربی بسیط ف میں ضرب دیا جائے۔ و فرض کرو کہ اگلا حاصل تقسیم ک و بقیہ ی ہے۔ آخر میں د کو ی سے تقسیم کرو، و فرض کرو کہ ر حاصل تقسیم ہے، و فرض کرو کہ اس کا بقیہ کچھ نہیں آیا۔ تو ی اعلی جز ضربی مشترک ہوگا جو مطلوب ہے۔

تو حل مسئلہ کی صورت ہوگی

ء) ب (س
سء
ہ) ج (
د) فء (ک
کد
ی) د (ر
ری

اولا، یہ ثابت کرتے ہیں کہ ی جز ضربی مشترک ہے ء و ب کا۔

حل مسئلہ کے اقدام میں غور کرنے سے ظاہر ہے کہ ی سے د تقسیم ہوگا، لہذا کد بھی تقسیم ہوگا، لہذا کد+ی بھی ہوگا، لہذا فء بھی ہوگا، لہذا ء بھی ہوگا کیونکہ ف جز ضربی بسیط ہے۔

و ی سے د تقسیم ہوگا، لہذا ھد بھی ہوگا یعنی ج بھی ہوگا، و چونکہ ی

سے ع و ج تقسیم ہوگا تو سع+ج بھی ہوگا یعنی ب بھی ہوگا۔ لہذا ی سے

ع و ب دونوں تقسیم ہوں گے۔

اب یہ ثابت کرتے ہیں ی اعلی جز ضربی مشترک ہے۔

اگر نہیں ہے، تو فرض کرو کہ ض ی سے زیادہ درجہ کا جز ضربی ہے۔ تو ع

و ب دونوں ض سے تقسیم ہوں گے، لہذا ب-سع یعنی ج بھی اس سے

تقسیم ہوگا، لہذا د بھی ہوگا کیونکہ ھ تو جز ضربی بسیط ہے، لہذا فع-کد

یعنی ی بھی ہوگا۔ تو ض سے ی تقسیم ہو گیا جو کہ مستحیل ہے کیونکہ

ہم نے فرض کیا ہے کہ ض درجہ میں ی سے زیادہ ہے۔ لہذا ی اعلی جز

ضربی مشترک ثابت ہوا۔

148. تین عبارات ع، ب، ج کا اعلی جز ضربی مشترک درج ذیل طریقہ سے
حاصل کیا جائے گا۔

اولا، ع و ب کا اعلی جز ضربی مشترک ف حاصل کرو، پھر ف و ج کا اعلی

جز ضربی مشترک ض حاصل کرو، تو ض اعلی جز ضربی مشترک ہوگا ع،

ب، ج کا جو ہمارا مطلوب ہے، کیونکہ ف ہر اس جز ضربی کو ضمن میں لیے

ہے جو ع و ب میں مشترک ہیں، و ض اعلی جز ضربی مشترک ہے ف و ج

کا۔ لہذا ض اعلی جز ضربی مشترک ہے ع، ب، ج کا۔

باب انیسواں: مکسورات

149. باب گیارویں میں ہم نے مکسورات بسیط کی بحث کیا تھا عام قواعد حساب استعمال کرتے ہوئے۔ و یہاں ہم ان قواعد کو ثابت کریں گے و دکھائیں گے کہ وہ مکسورات جبری پہ بھی جاری ہوتے ہیں۔

150. **تعریف:** اگر ایک مقدار للـ کو بـ متساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے، پھر ان حصوں کا عـ اخذ کیا جائے، تو نتیجہ "للـ کا مکسور $\frac{عـ}{بـ}$" کہلائے گا۔ و اگر للـ وحدت ہو، تو للـ کا مکسور $\frac{عـ}{بـ}$ خالص "مکسور $\frac{عـ}{بـ}$" کہلائے گا؛ جو دلالت کرے گا عـ متساوی حصوں پہ جن میں سے ایک حصہ کا بـ گنا وحدت بنائے گا جیسے مکسور 3\4 ہوا 0.75 جس میں تین متساوی حصے ہیں یعنی 0.25 + 0.25 + 0.25، تو اگر ان میں سے ایک حصہ کو 4 گنا کیا جائے تو 1 آئے گا۔

151. اس بات کو ثابت کرنے کے لیے کہ $\frac{عـ}{بـ} = \frac{مـعـ}{مـبـ}$ جبکہ عـ، بـ، مـ اعداد صحیح ایجابی ہوں۔

$\frac{عـ}{بـ}$ سے ہماری مراد ہے عـ متساوی حصے جس کا بـ ایک وجدت بنائے ......(1)

و $\frac{مـعـ}{مـبـ}$ سے ہماری مراد ہے مـعـ حصے، جن کا مـبـ ایک وحدت بنائے ......(2)

لیکن بـ حصے (1) میں = مـبـ حصے (2) میں

$\therefore$ 1 حصہ (1) میں = ہ حصے (2) میں

$\therefore$ ء حصے (1) میں = ہء حصے (2) میں

تو $\frac{ء}{ب} = \frac{ہء}{ہب}$

برعکس $\frac{ہء}{ہب} = \frac{ء}{ب}$

لہذا ہمیں درج ذیل قواعد حاصل ہوئے۔

قاعدۂ اول: اگر ہم ما فوق و ما تحت کو ایک ہی مقدار سے ضرب یا تقسیم کریں تو مکسور کی قیمت میں کوئی تغیر نہ ہوگا۔

یعنی مکسور جبری کو اس کے متساوی کسی مکسور تک مخفف کیا جا سکتا ہے، اس کے ما فوق و ما تحت کو کسی جز ضربی مشترک سے تقسیم کر کے؛ و اگر یہ جز ضربی اعلی جز ضربی مشترک ہوا تو نتیجہ میں حاصل ہونے والے مکسور کے لیے کہا جائے گا کہ وہ اپنی **ادنی حدود** میں ہے۔

مثال اول: $\frac{24ء^3ج^2س^2}{18ء^3س^2 - 12ء^2س^3}$ کو ادنی حدود میں مخفف کرو

$$\frac{24ء^3ج^2س^2}{18ء^3س^2 - 12ء^2س^3} = \frac{24ء^3ج^2س^2}{6ء^2س^2\ (3ء-2س)}$$

$$= \frac{4ءج^2}{3ء-2س}$$

مثال دوم: $\frac{6\text{س}^2 - 8\text{سف}}{9\text{سف} - 12\text{ف}^2}$ کو ادنی حدود میں مخفف کرو۔

$$\frac{6\text{س}^2 - 8\text{سف}}{9\text{سف} - 12\text{ف}^2} = \frac{2\text{س}(3\text{س}-4\text{ف})}{3\text{ف}(3\text{س}-4\text{ف})} = \frac{2\text{س}}{3\text{ف}}$$

تنبیہ: مبتدی کو اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ منسوخ کرنے کا عمل تب تک نہ کرے جب تک ما تحت و ما فوق کو اسہل صورت میں تعبیر نہ کر لے، تجزیہ سے جہاں ضروری ہو۔

152. جب ما فوق و ما تحت کے اجزاء ضربی معاینہ سے معلوم نہ ہو سکیں تو مکسور کو اس کی ادنی حدود تک مخفف کیا جا سکتا ہے ما فوق و ما تحت دونوں کو ان کے اعلی جز ضربی مشترک سے تقسیم کر کے، و وہ اعلی جز ضربی مشترک ان قواعد سے حاصل کیا جائے گا جو باب اٹھارویں میں مذکور ہیں۔

مثال: $\frac{3\text{س}^3 - 13\text{س}^2 + 23\text{س} - 21}{15\text{س}^3 - 38\text{س}^2 - 2\text{س} + 21}$ کو ادنی حدود تک مخفف کرو۔

طریقۂ اول: ما فوق و ما تحت کا اعلی جز ضربی مشترک ہے $3\text{س}-7$۔ تو ما فوق و ما تحت کو اس سے تقسیم کرو، جس کے مطابق حاصل تقسیم ہوا $\text{س}^2-2\text{س}+3$ و $5\text{س}^2-\text{س}-3$۔

لہذا ہوا $$\frac{3\text{س}^3 - 13\text{س}^2 + 23\text{س} - 21}{15\text{س}^3 - 38\text{س}^2 - 2\text{س} + 21} = \frac{(3\text{س}-7)(\text{س}^2-2\text{س}+3)}{(3\text{س}-7)(5\text{س}^2-\text{س}-3)}$$

$$= \frac{\text{س}^2-2\text{س}+3}{5\text{س}^2-\text{س}-3}$$

مبتدی کے لیے یہ طریقہ اسہل ہے، لیکن اس میں و اس جیسے مسئلہ میں ہم عام طور سے اعلی جز ضربی مشترک حاصل کیے بنا تخفیف کر دیتے ہیں۔

طریقۂ دوم: مضمون 141 کے مطابق ما فوق و ما تحت کا اعلی جز ضربی مشترک ان دونوں کے اجتماع $18س^3-51س^2+21س$ کا جز ضربی ہونا چاہیے، یعنی $3س(3س-7)(2س-1)$ کا۔ و اگر یہاں کوئی مقسوم بہ مشترک ہے تو لامحالہ وہ $(3س-7)$ ہے۔ لہذا ما تحت و ما فوق کو ایسے مرتب کرو کہ $3س-7$ جز ضربی کے طور پہ ظاہر ہو۔

$$\text{مکسور} = \frac{س^2(3س-7)-2س(3س-7)+3(3س-7)}{5س^2(3س-7)-س(3س-7)-3(3س-7)}$$

$$= \frac{(3س-7)(س^2-2س+3)}{(3س-7)(5س^2-س-3)}$$

$$= \frac{س^2-2س+3}{5س^2-س-3}$$

153. اگر ما فوق یا ما تحت میں سے کسی کا بھی بآسانی تجزیہ ہو سکے تو ہم طریقہ مذکور اختیار کریں گے۔

مثال: $\dfrac{س^3+3س^2-4س}{7س^3-18س^2+6س+5}$

ما فوق = س(س^2+3س-4) = س(س+4)(س-1)

ان اجزاء ضربی میں سے صرف ایک ہے جو جز ضربی مشترک بن سکتا ہے

س-1۔ تو ما تحت کو مرتب کیا

$$\text{مکسور} = \frac{\text{س(س+4)(س-1)}}{\text{7س}^2\text{(س-1)-11س(س-1)-5(س-1)}}$$

$$= \frac{\text{س(س+4)(س-1)}}{\text{(س-1)(7س}^2\text{-11س-5)}}$$

$$= \frac{\text{س(س+4)}}{\text{7س}^2\text{-11س-5}}$$

154. **قاعدۂ دوم:** عدد مکسور میں عدد صحیح کو ضرب دینے کے لیے اس کے ما فوق میں اس صحیح کو ضرب دو، یا اگر ما تحت اس صحیح سے تقسیم ہو سکے تو ما تحت کو اس سے تقسیم کر دو۔ اس قاعدہ کی دلیل درج ذیل ہے۔

(1) $\frac{\text{ع}}{\text{ب}}$ سے مراد ع متساوی حصے ہیں جن کا ب ایک وحدت بناتا ہے۔

$\frac{\text{عج}}{\text{ب}}$ سے مراد عج متساوی حصے ہیں جن کا ب ایک وحدت بناتا ہے۔

و دوسرے مکسور میں جو حصے لیے گئے ہیں وہ پہلے والے سے ج گنا زیادہ ہیں۔

یعنی $\frac{\text{ع}}{\text{ب}} \times \text{ج} = \frac{\text{عج}}{\text{ب}}$

(2) $\frac{\text{ع}}{\text{بض}} \times \text{ض} = \frac{\text{عض}}{\text{بض}} = \frac{\text{ع}}{\text{ب}}$ گزشتہ مسئلہ کے مثل ہے۔

[اصل اول، مضمون 151]

155. **قاعدۂ سوم:** عدد مکسور کو عدد صحیح سے تقسیم کرنے کے لیے اس کے ما فوق کو عدد صحیح سے تقسیم کرو اگر ممکن ہو، یا اگر ما فوق کو تقسیم کرنا ممکن نہ ہو تو اس عدد صحیح کو ما تحت میں ضرب دے دو۔
اس قاعدہ کو طریقہ ذیل سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(1) $\frac{\text{عجـ}}{\text{بـ}}$ کا معنی ہے عجـ متساوی حصے جن کا بـ ایک وحدت بناتا ہے۔
$\frac{\text{ع}}{\text{بـ}}$ کا معنی ہے ع متساوی حصے جن کا بـ ایک وحدت بناتا ہے۔

حصے جو پہلے مکسور میں ہیں وہ دوسرے کے مقابلے جـ گنا زیادہ ہیں۔

لہذا پہلے مکسور کو جـ سے تقسیم کرنے پہ حاصل تقسیم دوسرا مکسور ہوگا۔

یعنی $\frac{\text{عجـ}}{\text{بـ}} \div \text{جـ} = \frac{\text{ع}}{\text{بـ}}$ ۔

(2) مگر اگر ما فوق جـ سے تقسیم نہ ہو سکے تو ہوگا

$$\frac{\text{ع}}{\text{بـ}} = \frac{\text{عجـ}}{\text{بجـ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{بـ}} \div \text{جـ} = \frac{\text{عجـ}}{\text{بجـ}} \div \text{جـ} = \frac{\text{ع}}{\text{بجـ}}$$

156. $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ کے $\frac{\text{ء}}{\text{ب}}$ کی قیمت نکالنے کے لیے۔

تعریف کے مطابق [مضمون 150]

$\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ کا $\frac{\text{ء}}{\text{ب}}$ سے مراد ہے ء متساوی حصے جن کا بـ بناتا ہے $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$

چونکہ بـ حصے = $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$

ایک حصہ = $\frac{\text{ج}}{\text{د}} \div \text{ب} = \frac{\text{ج}}{\text{بد}}$ [قاعدۂ سوم مضمون 155]

∴ ء حصے = $\frac{\text{ج}}{\text{بد}} \times \text{ء} = \frac{\text{ءج}}{\text{بد}}$ [قاعدۂ دوم مضمون 154]

∴ $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ کا $\frac{\text{ء}}{\text{ب}} = \frac{\text{ءج}}{\text{بد}}$

ایسے ہی $\frac{\text{ء}}{\text{ب}}$ کا $\frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{جء}}{\text{دب}}$

لہذا $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ کا $\frac{\text{ء}}{\text{ب}} = \frac{\text{ء}}{\text{ب}}$ کا $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$۔

157. **قاعدۂ چہارم:** دو یا زیادہ مکسورات کو ضرب دینے کے لیے ان کے ما فوقوں کو آپس میں ضرب کرو تاکہ جدید ما فوق حاصل ہو، و ما تحتوں کو آپس میں ضرب کرو تاکہ جدید ما تحت حاصل ہو۔

و ضرب کی تعریف سے معلوم ہوا ہے کہ وہ کسی مقدار کو کسی معین مرتبہ خود میں جمع کرنا ہے۔ لیکن جب مضروب مکسور ہو تو یہ تعریف غیر معقول ہو جاتی ہے۔ و تب عمل ضرب کو سمجھنے کے لیے نظریہ کو مزید وسیع کرنا ہوتا ہے۔

لہذا $\frac{ع}{ب} \times \frac{ج}{د}$ کا معنی حاصل کرنے کے لیے ہمیں $\frac{ج}{د}$ مرتبہ $\frac{ع}{ب}$ حاصل کرنا ہوگا۔

تو $\frac{ع}{ب}$ پہ وہی عمل کرنا ہوگا، جو ہم نے $\frac{ج}{د}$ حاصل کرنے کے لیے وحدت پہ کیا۔

اس مسئلہ میں ہم 1 کا $\frac{ج}{د}$ لیں گے؛ لہذا پہلے والے میں لیں گے $\frac{ع}{ب}$ کا $\frac{ج}{د}$.

لہذا $\frac{ع}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ب}$ کا $\frac{ج}{د} = \frac{عج}{بد}$ [مضمون 156]

ایسے ہی $\frac{ع}{ب} \times \frac{ج}{د} \times \frac{ھ}{ک} = \frac{عجھ}{بدک}$

158. **قاعدۂ پنجم:** ایک مکسور کو دوسرے مکسور سے تقسیم کرنے کے لیے مقسوم بہ کو مقلوب کر دو، پھر عمل ضرب کرو۔

چونکہ تقسیم ضرب کا عکس ہے تو اگر $\frac{ع}{ب}$ کو $\frac{ج}{د}$ سے تقسیم کیا گیا تو ان کے حاصل تقسیم ﷲ کی ہم ایسے تعریف کر سکتے ہیں کہ

$$س \times \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ب}$$

دونوں جانب میں د\ج کو ضرب دیا تو حاصل ہوا

$$س \times \frac{ج}{د} \times \frac{د}{ج} = \frac{ع}{ب} \times \frac{د}{ج}$$

$$س = \frac{عد}{بج}$$

لہذا $\frac{ع}{ب} \Big\backslash \frac{ج}{د} = \frac{عد}{بج} = \frac{ع}{ب} \times \frac{د}{ج}$ [مضمون 157]

و اس سے قاعدۂ مذکور ثابت ہو گیا۔

مثال اول: $\frac{2ع^2+3ع}{4ع^3} \times \frac{4ع^2-6ع}{12ع+18}$ کو ابسط بناؤ

$$\frac{2ع^2+3ع}{4ع^3} \times \frac{4ع^2-6ع}{12ع+18} = \frac{ع(2ع+3)}{4ع^3} \times \frac{2ع(2ع-3)}{6(2ع+3)}$$

$$= \frac{2ع-3}{12ع}$$

یہ ان اجزاء ضربی کو منسوخ کرکے حاصل ہوا ہے جو ما فوق و ما تحت میں مشترک ہیں۔

مثال دوم: $\frac{6\text{س}^2-\text{عس}-2\text{ع}^2}{\text{عس}-\text{ع}^2} \times \frac{\text{س}-\text{ع}}{9\text{س}^2-4\text{ع}^2} \div \frac{2\text{س}+\text{ع}}{3\text{عس}+2\text{ع}^2}$

$$= \frac{6\text{س}^2-\text{عس}-2\text{ع}^2}{\text{عس}-\text{ع}^2} \times \frac{\text{س}-\text{ع}}{9\text{س}^2-4\text{ع}^2} \times \frac{3\text{عس}+2\text{ع}^2}{2\text{س}+\text{ع}}$$

$$= \frac{(3\text{س}-2\text{ع})(2\text{س}+\text{ع})}{\text{ع}(\text{س}-\text{ع})} \times \frac{\text{س}-\text{ع}}{(3\text{س}+2\text{ع})(3\text{س}-2\text{ع})} \times \frac{\text{ع}(3\text{س}+2\text{ع})}{2\text{س}+\text{ع}}$$

$= 1$، کیونکہ تمام اجزاء ضربی نے ایک دوسرے کو منسوخ کر دیا۔

باب بیسواں: ادنی حاصل ضربی مشترک

159. باب گیارہویں میں ہم نے دو یا زیادہ عبارات جبری کے ادنی حاصل ضربی مشترک کی تعریف کیا تھا کہ وہ ادنی درجات کی عبارت جو ان دونوں میں سے ہر ایک سے بنا بقیہ کے تقسیم ہو جائے۔ و وہاں ہم نے یہ بھی بتایا تھا کہ کیسے عباراتِ بسیط کے مسئلہ میں محض ملاحظہ کر کے ادنی حاصل ضربی مشترک معلوم کیا جا سکتا ہے۔

و عباراتِ مرکب جو اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کی شکل پہ مذکور ہوں یا جن کا بآسانی تجزیہ کیا جا سکے، ان کا ادنی حاصل ضربی مشترک بھی طریقۂ مذکور سے بآسانی معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال اول: 6س^2(ع-س)^2، 8ع^3(ع-س)^3 و 12عس(ع-س)^5 کا ادنی حاصل ضربی مشترک ہوا 24ع^{3}س^2(ع-س)^5

کیونکہ وہ یعنی ادحم متضمن ہے دو چیزوں کے حاصل ضرب کو

(1) ضرِبْیات رقمی کا ادنی حاصل ضربی مشترک

(2) ہر جز ضربی کی وہ ادنی قدر جو عبارات میں مذکور اس ضربی کی ہر قدر سے تقسیم ہو جائے۔

مثال دوم: 3ع^2+9عب، 2ع^3-18عب^2، ع^3+6ع^{2}ب+9عب^2 کا ادنی حاصل ضربی مشترک بتاو۔

3ع^2+9عب = 3ع(ع+3ب)

2ع^3-18عب^2 = 2ع(ع+3ب)(ع-3ب)

ع^3+6ع^{2}ب+9ع^2 = ع(ع+3ب)(ع+3ب)

= ع(ع+3ب)^2

لہذا ادنی حاصل ضربی مشترک ہوا 6ع(ع+3ب)^2 (ع-3ب)۔

160. جب عباراتِ مذکور ایسی ہوں کہ ان کے اجزاء ضربی ملاحظہ سے معلوم نہ ہو سکیں تو وہ اعلی جز ضربی مشترک معلوم کر کے حل کی جائیں گی۔

مثال: 2س^4+س^3-20س^2-7س+24 و 2س^4+3س^3-13س^2-7س+15 کا ادنی حاصل ضربی مشترک بتاو۔

ان کا اعلی جز ضربی مشترک ہے س^2+2س-3

تو تقسیم کر کے حاصل ہوا

2س^4+س^3-20س^2-7س+24 = (س^2+2س-3)(2س^2-3س-8)

2س^4+3س^3-13س^2-7س+15 = (س^2+2س-3)(2س^2-س-5)

لہذا ادنی حاصل ضربی مشترک ہوا

(س^2+2س-3)(2س^2-3س-8)(2س^2-س-5)

161. ہم اب دو عبارات مرکب کا ادنی حاصل ضربی مشترک معلوم کرنے کے قاعدے کو ثابت کریں گے۔

فرض کرو کہ أ و ب دو عبارات ہیں، و ف ان کا اعلی جز ضربی مشترک ہے، و فرض کرو کہ ع و بـ حاصل تقسیم ہیں جب أ و ب کو ف سے تقسیم کیا، تو أ=عف، ب=بـف۔ چونکہ ع و بـ میں کوئی ضربئ مشترک نہیں ہے تو أ و ب کا ادنی حاصل ضربی مشترک ہوا عبـف، ملاحظہ سے معلوم ہوا۔

162. دو عبارات کے اعلی جز ضربی مشترک و ادنی حاصل ضربی مشترک کے درمیان ایک اہم تعلق ہوتا ہے جس کو یہاں نمایا کیا جا رہا ہے۔

فرض کرو کہ أ و ب کا اعلی جز ضربی مشترک ف ہے، و ادنی حاصل ضربی مشترک س ہے۔ تو، جیسا مضمون سابق میں تھا، ہوا

أ = عف ، ب = بـف

و س = عبـف

لہذا حاصل ضرب أب = عف×بـف

= ف×عبـف

= فس .... (1)

یعنی دو عبارات کا حاصل ضرب متساوی ہوتا ہے ان دونوں کے اعجم و ادحم کے حاصل ضرب کے۔

از (1) س = $\frac{\text{أب}}{\text{ف}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{ف}}$ × ب = $\frac{\text{ب}}{\text{ف}}$ × أ

یعنی دو عبارات کا ادنی حاصلِ مشترک معلوم کرنے کے لیے ان کے حاصلِ ضرب کو ان کے اعلی جز ضربی مشترک سے تقسیم کرو، یا ان دونوں میں سے کسی ایک کو اعلی جز ضربی مشترک سے تقسیم کر کے دوسری کو اس میں ضرب دو۔

163. تین عبارات أ، ب، ج کا ادنی حاصل ضربی مشترک طریقہ ذیل سے حاصل ہوگا۔
اولا، أ و ب کا ادنی حاصل ضربی مشترک س معلوم کرو، پھر س و ج کا ادنی حاصل ضربی مشترک ی معلوم کرو، تو ی ادنی حاصل ضربی مشترک ہوگا أ، ب، ج کا۔

چونکہ ی ادنی درجہ کی عبارت ہے جو س و ج سے تقسیم ہو سکتی ہے، و س ادنی درجہ کی عبارت ہے جو أ و ب سے تقسیم ہو سکتی ہے۔ لہذا ی ادنی درجہ کی عبارت ہے جو تینوں سے تقسیم ہو سکتی ہے۔

باب اکیسواں: جمع و تفریقِ مکسورات

164. عبارات مذکور کا ادنی حاصل ضربی مشترک معلوم کرنے کے قواعد بیان کرنے کے بعد اب ہم یہ بحث کریں گے کہ مکسورات میں جمع و تفریق کیسے ہوتے ہیں۔

165. $\frac{\text{ع}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{عد} + \text{بج}}{\text{بد}}$ کا ثبوت

ہمارے پاس ہے $\frac{\text{ع}}{\text{ب}} = \frac{\text{عد}}{\text{بد}}$ و $\frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{بـج}}{\text{بـد}}$ [مضمون 151، قاعدۂ اول]

لہذا ہر ایک مسئلہ میں ہم نے وحدت کو بـد متساوی حصوں میں تقسیم کیا، پھر اولا ان حصوں کا عد لیا، پھر بـج؛ یعنی وحدت کے بـد حصوں کا عد+بـج لیا، جس کو مکسور میں تعبیر کیا جائے گا کہ $\frac{\text{عد} + \text{بج}}{\text{بد}}$

$$\frac{\text{ع}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{عد} + \text{بج}}{\text{بد}}$$

$$\frac{\text{ع}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{عد} - \text{بج}}{\text{بد}}$$

166. یہاں دونوں مکسورات کو ما تحت مشترک بـد کے ساتھ تعبیر کیا گیا ہے۔

لیکن اگر بـ و د میں کوئی جز ضربی مشترک ہو بـد کا حاصل ضرب ادنی ما تحت مشترک نہ ہوگا و مکسور $\frac{عد + بج}{بد}$ اپنی ادنی حدود میں نہ ہوگا۔

جو مکسور اپنی ادنی حدود میں نہ ہو اس میں عمل سے احتزار کے لیے حلّ مسئلہ کے طریقۂ مذکور میں بعض ترمیم کی ضرورت ہوتی ہے۔ افضل ہے کہ عمل میں ادنی ما تحت مشترک کو استعمال کیا جائے، جو عبارات مذکور کے ما تحتوں کا ادنی حاصل ضربی مشترک ہوتا ہے۔

قاعدۂ اول: مکسورات کو ان کے ادنی ما تحت مشترک تک مخفف کرنے کے لیے ان ما تحتوں کا ادنی حاصل ضربی مشترک معلوم کرو و اسے ما تحت مشترک بناؤ، پھر اسے پہلے مکسور کے ماتحت سے تقسیم کرو، و حاصل تقسیم کو اسی مکسور کے مافوق میں ضرب دو۔ پھر دیگر مکسورات کے ساتھ بھی یہی کرو۔

مثال: $\frac{5س}{2ع(س-ع)}$ و $\frac{4ع}{3س(س^2-ع^2)}$

اس کا ادنی ما تحت مشترک ہوا 6عس(س-ع)(س+ع)

لہذا ہم 3س(س+ع) و 2 کو حسبِ ترتیب ما فوق میں ضرب دیں گے۔

لہذا دونوں مکسورات ہوں گے

$$\frac{15س^2(س+ع)}{6عس(س-ع)(س+ع)} \text{ و } \frac{8ع}{6عس(س-ع)(س+ع)}$$

167. اب ہم مکسورات کے جمع و تفریق کے قواعد بیان کر سکتے ہیں۔

قاعدۂ دوم: مکسورات کو جمع یا اس کی تفریق کرنے کے لیے ان کو ادنی ما تحت مشترک تک مخفف کرو، پھر ما فوقوں کو جمع یا تفریق کرو، و ما تحت مشترک کو ویسے ہی رہنے دو۔

مثال اول: $\frac{\text{2س+ع}}{\text{3ع}} + \frac{\text{5س+4ع}}{\text{9ع}}$ کی تبسیط کرو

اس کا ادنی ما تحت مشترک ہوا 9ع ۔

لہذا عبارت ہوئی $= \frac{\text{3(2س+ع) + 5س - 4ع}}{\text{9ع}}$

$$= \frac{\text{6س + 3ع + 5س - 4ع}}{\text{9ع}}$$

$$= \frac{\text{11س - ع}}{\text{9ع}}$$

مثال دوم: $\frac{\text{س - 2ف}}{\text{سف}} + \frac{\text{3ف - ع}}{\text{عف}} + \frac{\text{3س - 2ع}}{\text{عس}}$ کی تبسیط کرو

اس کا ادنی ما تحت مشترک ہوا عسف ۔

لہذا عبارت ہوئی $= \frac{\text{ع(س-2ع) + س(3ف-ع) - ف(3س-2ع)}}{\text{عسف}}$

$$= \frac{\text{عس - 2عف + 3سف - عس - 3سف + 2عف}}{\text{عسف}}$$

= 0، کیونکہ ما فوق کی تمام حدود نے ایک دوسرے کو زائل کر دیا۔

تنبیہ: عمل کی درستگی کو موکد کرنے کے لیے مبتدی کو مشورہ دیا جاتا ہے کہ وہ چاندوں کا استعمال ضرور کرے جیسے عمل مذکور کی پہلی سطر میں ہے۔

مثال سوم: $\frac{2س-3ع}{س-2ع} - \frac{2س-ع}{س-ع}$ کی تبسیط کرو

اس کا ادنی ما تحت مشترک ہے $(س-2ع)(س-ع)$

لہذا ما فوقوں کو $س-ع$ و $س-2ع$ میں ضرب دیا جائے گا حسب ترتیب۔

لہذا عبارت ہوئی $= \frac{(2س-3ع)(س-ع) - (2س-ع)(س-2ع)}{(س-2ع)(س-ع)}$

$$= \frac{2س^2 - 5عس + 3ع^2 - (2س^2 - 5عس + 2ع^2)}{(س-2ع)(س-ع)}$$

$$= \frac{2س^2 - 5عس + 3ع^2 - 2س^2 + 5عس - 2ع^2}{(س-2ع)(س-ع)}$$

$$= \frac{ع^2}{(س-2ع)(س-ع)}$$

تنبیہ: $-(2س-ع)(س-2ع)$ جیسی عبارت کی قیمت معلوم کرنے میں مبتدی کو حاصلِ ضرب اولاً چاندوں میں تعبیر کرنا چاہیے جیسے کہ ہم نے کیا ہے۔ پھر کچھ مشق ہونے کے بعد وہ دونوں اقدام ایک ساتھ اٹھا سکتا ہے۔۔

و بعض اوقات مکسورات کو اولاً ان کی ادنی حد تک مخفف کرنے سے عمل چھوٹا ہو جاتا ہے۔

مثال چہارم: $\frac{\text{س}^2 + 5\text{سف} - 4\text{ف}^2}{\text{س}^2 - 16\text{ف}^2} - \frac{2\text{سف}}{2\text{س}^2 + 8\text{سف}}$ کی تبسیط کرو

$$= \frac{\text{س}^2 + 5\text{سف} - 4\text{ف}^2}{\text{س}^2 - 16\text{ف}^2} - \frac{\text{ف}}{\text{س} + 4\text{ف}}$$

$$= \frac{\text{س}^2 + 5\text{سف} - 4\text{ف}^2 - \text{ف}(\text{س} - 4\text{ف})}{\text{س}^2 - 16\text{ف}^2}$$

$$= \frac{\text{س}^2 + 5\text{سف} - 4\text{ف}^2 - \text{سف} - 4\text{ف}^2}{\text{س}^2 - 16\text{ف}^2}$$

$$= \frac{\text{س}^2 + 4\text{سف}}{\text{س}^2 - 16\text{ف}^2}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{س} - 4\text{ف}}$$

168. گزشتہ مطلق طریقوں میں کچھ تبدیلات کرکے انہیں مزید مفاد کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جن میں سے سب سے زیادہ کارآمد حیل درج ذیل مثالوں میں بیان ہیں۔ لیکن کوئی بھی قاعدہ ایسا نہیں ہے جو ہر مسئلہ میں جاری ہو۔

مثال اول: $\frac{\text{ع} + 3}{\text{ع} - 4} - \frac{\text{ع} + 4}{\text{ع} - 3} - \frac{8}{\text{ع}^2 - 16}$ کی تبسیط کرو

پہلے اول کے دو مکسورات میں عمل کیا پھر اس کے نتیجے و تیسرے میں

میں۔

$$= \frac{\text{ع}^2 - 9 - (\text{ع}^2 - 16)}{(\text{ع} - 4)(\text{ع} - 3)} - \frac{8}{\text{ع}^2 - 16}$$

$$= \frac{7}{(\text{ع} - 4)(\text{ع} - 3)} - \frac{8}{(\text{ع} + 4)(\text{ع} - 4)}$$

$$= \frac{7(\text{ع} + 4) - 8(\text{ع} - 3)}{(\text{ع} + 4)(\text{ع} - 4)(\text{ع} - 3)}$$

$$= \frac{52 - \text{ع}}{(\text{ع} + 4)(\text{ع} - 4)(\text{ع} - 3)}$$

مثال دوم: $\frac{1}{2\text{س}^2 + \text{س} - 1} + \frac{1}{3\text{س}^2 + 4\text{س} + 1}$ کی تبسیط کرو

$$= \frac{1}{(2\text{س} - 1)(\text{س} + 1)} + \frac{1}{(3\text{س} + 1)\ (\text{س} + 1)}$$

$$= \frac{3\text{س} + 1 + 2\text{س} - 1}{(2\text{س} - 1)(\text{س} + 1)(3\text{س} + 1)}$$

$$= \frac{5\text{س}}{(2\text{س} - 1)(\text{س} + 1)(3\text{س} + 1)}$$

مثال سوم: $\frac{1}{\text{ع} - \text{س}} - \frac{1}{\text{ع} + \text{س}} - \frac{2\text{س}}{\text{ع}^2 + \text{س}^2} - \frac{4\text{س}^3}{\text{ع}^4 + \text{س}^4}$

یہاں ظاہر ہے کہ اول کے دو ما تحتوں کا ادنی حاصل ضربی مشترک $\text{ع}^2 - \text{س}^2$

ہوگا، جو بآسانی $\text{ع}^2 + \text{س}^2$ سے مل کے ادنی حاصل ضربی مشترک $\text{ع}^4 - \text{س}^4$

دیگا، پھر وہ $ع^4+س^4$ سے مل کے ادنی حاصل ضربی مشترک $ع^8-س^8$ دے گا۔

لہذا درج ذیل طریقہ پہ عمل کرنا مناسب ہوگا۔

عبارت ہوئی $= \frac{ع + س - (ع - س)}{ع^2 - س^2}$ ....

$$= \frac{2س}{ع^2 - س^2} - \frac{2س}{ع^2 + س^2} \text{.........}$$

$$= \frac{4س^3}{ع^4 - س^4} - \frac{4س^3}{ع^4 + س^4}$$

$$= \frac{8س^7}{ع^8 - س^8}$$

169. ابھی تک ہم نے یہ بیان نہیں کیا کہ جب مکسور کا ما فوق و ما تحت دونوں سلبی ہوں تو اسے کیسے تعبیر کرنا ہے۔ و مضمون 150 میں بیان کردہ مکسور کی تعریف اس پہ جاری نہ ہوگی، لیکن ایسا بیان دینا مشکل نہیں ہے جو معقول ہو و پہلے بیان کردہ اصول کے مطابق ہو۔

چونکہ $\frac{ع}{ب} \times ب = ع$ ، تو مکسور $\frac{ع}{ب}$ ایک مقدار ہے جسے بـ میں ضرب دینا ضروری ہے ع حاصل کرنے کے لیے۔ لہذا مکسور $\frac{ع}{ب}$ کو حاصل تقسیم کہا جا سکتا ہے جو بـ سے ع کو تقسیم کرنے پہ حاصل ہوا ہے۔

یہاں ہم طالب کو یاد دھیانی کرانا چاہیں گے کہ جب تقسیم میں مقسوم و مقسوم بہ دونوں اجابی نہ ہوں، تو ہم عمل ویسے ہی کرتے ہیں جیسے کہ وہ

دونوں ایجابی ہوں، پھر قاعدۂ علامات کے مطابق حاصل تقسیم میں مناسب علامت لاحق کرتے ہیں۔

170. $\frac{-\text{ع}}{-\text{بـ}}$ کا معنی معلوم کرنے کے لیے ہم اسے حاصل تقسیم فرض کریں گے جو -ع کو -بـ سے تقسیم کرنے کا نتیجہ ہے۔ و یہ حاصل ہوا ہے ع کو بـ سے تقسیم کر کے، و علامت کے قاعدے سے علامت + لاحق کر کے۔

لہذا $\frac{-\text{ع}}{-\text{بـ}} = +\frac{\text{ع}}{\text{بـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{بـ}}$ ....(1)

و $\frac{-\text{ع}}{\text{بـ}}$ حاصل تقسیم ہے جو نتیجہ ہے -ع کو بـ سے تقسیم کرنے کا۔ و یہ حاصل ہوا ہے ع کو بـ سے تقسیم کر کے، و علامت کے قاعدے سے علامت - لاحق کر کے۔

لہذا $\frac{-\text{ع}}{\text{بـ}} = -\frac{\text{ع}}{\text{بـ}}$ ....(2)

ایسے ہی $\frac{\text{ع}}{-\text{بـ}}$ حاصل تقسیم ہے جو نتیجہ ہے ع کو -بـ سے تقسیم کرنے کا۔ و یہ حاصل ہوا ہے ع کو بـ سے تقسیم کر کے و علامت کے قاعدے سے علامت - لاحق کر کے۔

لہذا $\frac{\text{ع}}{-\text{بـ}} = -\frac{\text{ع}}{\text{بـ}}$ ....(3)

یہ امور درج ذیل نقطوں میں شمار کیے گئے ہیں

1. اگر مکسور کے ما فوق و ما تحت دونوں کی علامات تبدیل کر دی جائیں تو کل مکسور کی علامت تبدیل نہ ہو گی۔
2. اگر خالص ما فوق کی علامت تبدیل کی جائے تو کل مکسور کی علامت بھی تبدیل ہو جائے گی۔
3. اگر خالص ما تحت کی علامت تبدیل کی جائے تو بھی کل مکسور کی علامت تبدیل ہو جائے گی۔

مذکورہ قواعد مکسور کی تخفیف کے بعض مسائل میں بڑے کارآمد ہیں، لہذا ہم انہیں دوسرے الفاظ میں تعبیر کر رہے ہیں جو بعض اوقات جاری کرنے میں زیادہ سہل ہوتے ہیں۔

1. ہم مکسور کے تمام ما فوقوں و ما تحتوں کی علامات تبدیل کر سکتے ہیں، اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی کیے بنا۔
2. ہم مکسور کی علامت تبدیل کر سکتے ہیں، اس کے ما فوق یا ما تحت میں سے کسی ایک کی تمام حدود کی علامات تبدیل کر کے۔

مثال اول: $\frac{\text{ب} - \text{ع}}{\text{ف} - \text{س}} = \frac{-\text{ب} + \text{ع}}{-\text{ف} + \text{س}} = \frac{\text{ع} - \text{ب}}{\text{س} - \text{ف}}$

مثال دوم: $\frac{\text{س} - \text{س}^2}{2\text{ف}} = -\frac{-\text{س} + \text{س}^2}{2\text{ف}} = -\frac{\text{س}^2 - \text{س}}{2\text{ف}}$

مثال سوم: $\frac{3\text{س}}{4 - \text{س}^2} = -\frac{3\text{س}}{-4 + \text{س}^2} = -\frac{3\text{س}}{\text{س}^2 - 4}$

درمیانی اقدام عموما حذف کر دیے جاتے ہیں۔

مثال چہارم: $\frac{ع}{س + ع} + \frac{2س}{س - ع} + \frac{ع(3س - ع)}{ع^2 - س^2}$ کو بسیط بناؤ۔

یہاں یہ بات ظاہر ہے کہ اول دو مکسورات کا ادنی ماتحت مشترک $س^2-ع^2$ ہے، لہذا مناسب ہے کہ تیسرے مکسور میں ما تحت کی علامت تبدیل کر دی جائے۔

لہذا عبارت ہوئی $\frac{ع}{س + ع} + \frac{2س}{س - ع} - \frac{ع(3س - ع)}{س^2 - ع^2}$

$$= \frac{ع(س-ع) + 2س(س + ع) - ع(3س - ع)}{س^2 - ع^2}$$

$$= \frac{عس - ع^2 + 2س^2 + 2عس - 3عس + ع^2}{س^2 - ع^2}$$

$$= \frac{2س^2}{س^2 - ع^2}$$

مثال پنجم: $\frac{5}{3س - 3} + \frac{3س - 1}{1 - س^2} + \frac{1}{2س + 2}$

لہذا عبارت ہوئی $\frac{5}{3(س - 1)} - \frac{3س - 1}{س^2 - 1} + \frac{1}{2(س + 1)}$

$$= \frac{10(س + 1) - 6(3س - 1) + 3(س - 1)}{6(س^2 - 1)}$$

$$= \frac{10\text{س} + 10 - 18\text{س} + 6 + 3\text{س} - 3}{6(\text{س}^2 - 1)}$$

$$= \frac{13 - 5\text{س}}{6(\text{س}^2 - 1)}$$

171. عبارت ذیل میں غور کرو

$$\frac{1}{(\text{ع}-\text{ب})(\text{ع}-\text{ج})} + \frac{1}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ع})} + \frac{1}{(\text{ج}-\text{ع})(\text{ج}-\text{ب})}$$

اس عبارت میں ما تحتوں کا ادنی حاصل ضربی مشترک حاصل کرنے کے لیے یہ دیکھنا لازم ہے کہ یہاں چھے مختلف اجزاء ضربی مرکب نہیں ہیں، کیونکہ تین دوسرے تین سے خالص علامت میں مختلف ہیں۔ لہذا

$$(\text{ع}-\text{ج}) = -(\text{ج}-\text{ع})$$

$$(\text{ب}-\text{ع}) = -(\text{ع}-\text{ب})$$

$$(\text{ج}-\text{ب}) = -(\text{ب}-\text{ج})$$

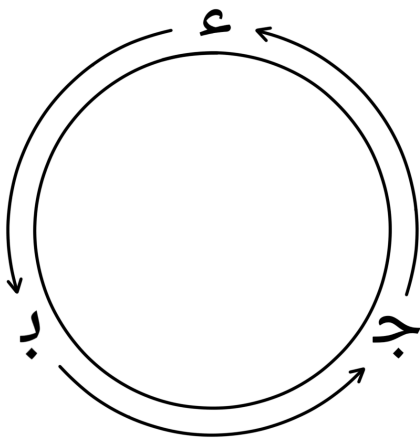
لہذا ہر ما تحت کے دوسرے جز ضربی کو اس کے متساوی سے تبدیل کر کے ہم درج ذیل عبارت تحریر کر سکتے ہیں

$$-\frac{1}{(\text{ع}-\text{ب})(\text{ج}-\text{ع})} - \frac{1}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ع}-\text{ب})} - \frac{1}{(\text{ج}-\text{ع})(\text{ب}-\text{ج})}$$

لہٰذا ادنی حاصل ضربی مشترک ہوا $(\text{ب} - \text{ج})\ (\text{ج} - \text{ع})\ (\text{ع} - \text{ب})$

و عبارت ہوئی $\dfrac{-(\text{ب}-\text{ج}) - (\text{ج}-\text{ع}) - (\text{ع}-\text{ب})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ع})(\text{ع}-\text{ب})}$

$$= \frac{\text{-بـ + جـ - جـ + ع - ع + بـ}}{\text{(بـ-جـ)(جـ-ع)(ع-بـ)}} = 0$$

172. مثال مذکور کی ترتیب میں ایک ایسی خاصیت ہے جو توجہ دینے لایق ہے۔ عبارت (1) میں حروف جس طور پہ آئے ہیں اسے **ترتیب دوری** کہتے ہیں؛ یعنی بـ ع کے بعد ہے و ع جـ کے بعد ہے۔ لہذا اگر ع ، بـ ، جـ کو دائرہ کے محیط کے گرد مرتب کر دیا جائے جیسے کی رسمۂ مذکور میں ہے؛ تو ہم چاہے جس حرف سے شروع کریں و تیر کے زخ پہ چلیں تو دیگر حروف ترتیبِ دوری پہ سامنے آئیں گے یعنی ع بـ جـ ، بـ جـ ع ، جـ ع بـ ۔

اس اصل کو جاننا خصوصا ان مسائل کے لیے مفید ہے جن میں تین حروف کے فرق شامل ہوتے ہیں۔ لہذا ہم ترتیب دوری کو پاتے ہیں جب بـ-جـ ، جـ-ع ، ع-بـ تحریر کرتے ہیں؛ و اس کا انتہاک کرتے ہیں جب ایسی ترتیب قائم کرتے ہیں جیسے بـ-جـ ، ع-جـ ، ع-بـ یا ع-جـ ، بـ-ع ، بـ-جـ ۔ تجربہ سے معلوم ہوتا ہے کہ مسئلہ میں شروع سے ترتیبِ دوری کو ملحوظ رکھنے سے عمل مختصر و سہل ہو جاتا ہے۔

موجودہ باب میں ہم نے بعض سہل مسائل ہی بیان کیے ہیں و باقی کا بیان باب انتیسویں میں کریں گے۔

باب بائیسواں: مکسورات متفرق

173. اب ہم ایسے متفرق مسائل بیان کریں گے جن میں پہلے بیان کردہ مکسورات سے زیادہ پیچیدہ مکسورات شامل ہوں گے۔ گزشتہ ابواب میں مکسورات کے ما تحت و ما فوق اعداد صحیح تھے۔ لیکن ایسے مسائل برابر پیش آتے ہیں جن میں مکسور کے ما فوق و ما تحت خود ایک مکسور ہوتے ہیں۔

174. **تعریف:** وہ مکسور جس کے ما فوق و ما تحت اعداد صحیح ہوں اس کو **مکسور بسیط** کہا جاتا ہے۔

و مکسور جس کا ما فوق یا ما تحت خود مکسور ہو اس کو **مکسور مرکب** کہا جاتا ہے۔

لہذا $\frac{\text{ء}}{\frac{\text{ب}}{\text{ج}}}$ ، $\frac{\frac{\text{ء}}{\text{ب}}}{\text{س}}$ ، $\frac{\frac{\text{ء}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ج}}{\text{د}}}$ مکسور مرکب ہیں۔

آخری مثال میں باہری مقادیر یعنی ء و د کو کبھی **منتہا** کہا جاتا ہے، جب کہ درمیانی مقادیر یعنی بـ و جـ کو **أوسط** کہا جاتا ہے۔

175. اگر وحدت کو کچھ متساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر حصہ **کسرِ وحدت** کہلائے گا۔

176. مکسور $\frac{\frac{ع}{ب}}{\frac{ج}{د}}$ کا ملاحظہ کرو

تعریف کے مطابق یہ مکسور، $\frac{ع}{ب}$ متساوی حصوں پہ دلالت کرتا ہے، جن کا $\frac{ج}{د}$ ایک وحدت بناتا ہے، یعنی جن کے ایک حصے کا $\frac{ج}{د}$ گنا ایک وحدت بناتا ہے۔

اس وحدت کو بـج کسور وحدت میں تقسیم کرو۔

تو وحدت بنانے والے $\frac{ج}{د}$ حصے و بـج کسورِ وحدت متساوی ہوں گے۔

لہذا ج حصے بـجـد کسور وحدت کے متساوی ہوئے۔

∴ 1 حصہ متساوی ہوا بـد کسر وحدت کے۔

∴ $\frac{ع}{ب}$ حصے متساوی ہوئے عد کسور وحدت کے۔

لہذا مکسور $\frac{\frac{ع}{ب}}{\frac{ج}{د}}$ دلالت کرتا ہے عد کسور وحدت پہ جس کا بـج وحدت بناتا ہے،

لیکن تعریف کے مطابق یہ مکسور $\frac{عد}{جب}$ ہے۔

$$\therefore \frac{\frac{ع}{ب}}{\frac{ج}{د}} = \frac{عد}{جب}$$

177. گزشتہ مضمون سے مکسور مرکب کو شکل بسیط میں تعبیر کرنے کا ایک سہل طریقہ معلوم ہوا۔

جدید ما فوق حاصل کرنے کے لیے دونوں منتہاوں کو ضرب دو، و جدید ما تحت حاصل کرنے کے لیے دونوں وسطوں کو ضرب دو۔

مثال:

$$\frac{\frac{\text{ع}+\text{س}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ع}^2-\text{س}^2}{\text{عب}}} = \frac{\text{عب}(\text{ع}+\text{س})}{\text{ب}(\text{ع}^2-\text{س}^2)}$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ع}-\text{س}}$$

یہ ما فوق و ما تحت سے اجزاء ضربی مشترک کو منسوخ کر کے حاصل ہوا ہے۔

178. ہم ثابت کرچکے ہیں کہ

$$\frac{\text{ع}}{\text{ب}} \div \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{\text{عد}}{\text{جب}}$$ [مضمون 158]

و $$\frac{\frac{\text{ع}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ج}}{\text{د}}} = \frac{\text{عد}}{\text{بج}}$$ [مضمون 176]

$$\therefore \frac{\frac{\text{ع}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ج}}{\text{د}}} = \frac{\text{ع}}{\text{ب}} \div \frac{\text{ج}}{\text{د}}$$

ہم پہلے یہ ذکر کر چکے ہیں کہ جب ما فوق و ما تحت اعداد صحیح ہوں تو مکسور دلالت کرتا ما تحت سے ما فوق کو تقسیم کرنے کے حاصل پہ، و یہی بات ہم یہاں مکسورِ مرکب میں بھی دیکھ سکتے ہیں۔

179. طالب کو درج ذیل مسائل کا بغور ملاحظہ کرنا چاہیے و بآسانی نتیجہ نکالنے کے لایق ہونا چاہیے۔

$$\frac{1}{\frac{\text{ع}}{\text{ب}}} = 1 \div \frac{\text{ع}}{\text{ب}} = 1 \times \frac{\text{ب}}{\text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{ع}}$$

$$\frac{\text{ع}}{\frac{1}{\text{ب}}} = \text{ع} \div \frac{1}{\text{ب}} = \text{ع} \times \frac{\text{ب}}{1} = \text{عب}$$

$$\frac{\frac{1}{\text{ع}}}{\frac{1}{\text{ب}}} = \frac{1}{\text{ع}} \div \frac{1}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ع}} \times \frac{\text{ب}}{1} = \frac{\text{ب}}{\text{ع}}$$

180. اب ہم ذکر کریں گے کہ کیسے مکسورات مرکب کو قواعد مذکور کے مطابق مخفف کیا جاتا ہے۔

مثال اول: $$\frac{\frac{\text{ع}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{د}}}{\frac{\text{ع}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{د}}} = \left(\frac{\text{ع}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{د}}\right) \div \left(\frac{\text{ع}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{د}}\right)$$

$$= \frac{\text{عد} + \text{بج}}{\text{بد}} \div \frac{\text{عد} - \text{بج}}{\text{بد}}$$

$$= \frac{\text{عد} + \text{بج}}{\text{بد}} \times \frac{\text{بد}}{\text{عد} - \text{بج}}$$

$$= \frac{\text{عد} + \text{بج}}{\text{عد} - \text{بج}}$$

مثال دوم:

$$\frac{\text{س} + \frac{\text{ع}^2}{\text{س}}}{\text{س} - \frac{\text{ع}^4}{\text{س}^3}} = \left(\text{س} + \frac{\text{ع}^2}{\text{س}}\right) \div \left(\text{س} - \frac{\text{ع}^4}{\text{س}^3}\right)$$

$$= \frac{\text{س}^2 + \text{ع}^2}{\text{س}} \div \frac{\text{س}^4 - \text{ع}^4}{\text{س}^3}$$

$$= \frac{\text{س}^2 + \text{ع}^2}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^3}{\text{س}^4 - \text{ع}^4}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 - \text{ع}^2}$$

مثال سوم: تبسیط کرو

$$\frac{\frac{\text{ع}^2+\text{ب}^2}{\text{ع}^2-\text{ب}^2} - \frac{\text{ع}^2-\text{ب}^2}{\text{ع}^2+\text{ب}^2}}{\frac{\text{ع}+\text{ب}}{\text{ع}-\text{ب}} - \frac{\text{ع}-\text{ب}}{\text{ع}+\text{ب}}}$$

مافوق

$$= \frac{(\text{ع}^2+\text{ب}^2)^2 - (\text{ع}^2-\text{ب}^2)^2}{(\text{ع}^2+\text{ب}^2)(\text{ع}^2-\text{ب}^2)}$$

$$= \frac{4\text{ع}^2\text{ب}^2}{(\text{ع}^2+\text{ب}^2)(\text{ع}^2-\text{ب}^2)}$$

ایسے ہی ما تحت

$$= \frac{4\text{ع}\text{ب}}{(\text{ع}+\text{ب})(\text{ع}-\text{ب})}$$

لہذا مکسور ہوا

$$= \frac{4\text{ع}^2\text{ب}^2}{(\text{ع}^2+\text{ب}^2)(\text{ع}^2-\text{ب}^2)} \div \frac{4\text{ع}\text{ب}}{(\text{ع}+\text{ب})(\text{ع}-\text{ب})}$$

$$= \frac{4\text{ع}^2\text{ب}^2}{(\text{ع}^2+\text{ب}^2)(\text{ع}^2-\text{ب}^2)} \times \frac{(\text{ع}+\text{ب})(\text{ع}-\text{ب})}{4\text{ع}\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{ع}\text{ب}}{\text{ع}^2+\text{ب}^2}$$

تنبیہ: جب ما فوق و ما تحت زیادہ پیچیدہ ہوں تو صفائی و درستگی برقرار رکھنے کے لیے مبتدی کو انہیں جدا جدا حل کرنا چاہیے جیسے مزکور مثال میں ہے۔

و **مکسور استمراری** کے مسئلہ میں ہم سب سے نیچے سے شروع کرتے ہیں، پھر قدم بہ قدم حل کرتے ہیں۔

مثال چہارم: تبسیط کرو

$$\frac{64-{}^{2}\text{س}9}{\dfrac{1}{\dfrac{\text{س}}{\text{س}+4}-1}-1-\text{س}}$$

عبارت ہوئی

$$\frac{64-{}^{2}\text{س}9}{\dfrac{1}{\dfrac{\text{س}-\text{س}+4}{\text{س}+4}}-1-\text{س}}$$

$$\frac{64-{}^{2}\text{س}9}{\dfrac{\text{س}+4}{4}-1-\text{س}} =$$

$$\frac{64-{}^{2}\text{س}9}{\dfrac{(\text{س}+4)-4-\text{س}4}{4}} =$$

$$\frac{(64-{}^{2}\text{س}9)}{\dfrac{8-\text{س}3}{4}} =$$

$$\frac{(64-{}^{2}\text{س}9)4}{8-\text{س}3} =$$

$$(8+\text{س}3)4 =$$

181. بعض اوقات ایک مکسور کو مکسورات کے ایک گروہ کے طور پہ تعبیر کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے۔

مثال: $\dfrac{5\text{س}^2\text{ف} - 10\text{س}\text{ف}^2 + 15\text{ف}^3}{10\text{س}^2\text{ف}^2}$

$$= \frac{5\text{س}^2\text{ف}}{10\text{س}^2\text{ف}^2} - \frac{10\text{س}\text{ف}^2}{10\text{س}^2\text{ف}^2} + \frac{15\text{ف}^3}{10\text{س}^2\text{ف}^2}$$

$$= \frac{1}{2\text{ف}} - \frac{1}{\text{س}} + \frac{3\text{ف}}{2\text{س}^2}$$

182. چونکہ مکسور ما تحت سے ما فوق کے حاصلِ تقسیم پہ دلالت کرتا ہے، تو ہم مکسور کو اس کے متساوی ایک ایسی شکل پہ تعبیر کر سکتے ہیں جو بعض کسری و بعض صحیحی ہوتی ہے۔

مثال اول: $\dfrac{\text{س} + 7}{\text{س} + 3} = \dfrac{(\text{س} + 2) + 5}{\text{س} + 2} = 1 + \dfrac{5}{\text{س} + 2}$

مثال دوم: $\dfrac{3\text{س}-2}{\text{س}+5} = \dfrac{3(\text{س}+5)-15-2}{\text{س}+5} = \dfrac{3(\text{س}+5)-17}{\text{س}+5}$

$$= 3 - \frac{17}{\text{س}+5}$$

بعض مسائل میں حقیقتا تقسیم کرنا افضل ہوتا ہے۔

مثال سوم: $\dfrac{2\text{س}^2-7\text{س}-1}{\text{س}-3} = 2\text{س} - 1 - \dfrac{4}{\text{س}-3}$

عمل تقسیم سے

$$
\begin{array}{r}
2س - 1 \\
س - 3 \,\big)\, 2س^{2} - 7س - 1 \\
2س^{2} - 6س \\
\hline
-س - 1 \\
-س + 3 \\
\hline
-4
\end{array}
$$

حاصل تقسیم ہے 2س-1 و بقیہ ہے 4-

لہذا $\frac{2س^{2}-7س-1}{س-3} = 2س - 1 - \frac{4}{س-3}$

183. اگر ما فوق ما تحت سے ادنی درجہ کا ہو تب بھی ہم عمل تقسیم کر سکتے ہیں، و نتیجہ کو ایسی شکل پہ تعبیر کر سکتے ہیں جو بعض صحیحی و بعض کسری ہو۔

مثال: ثابت کرو کہ $\frac{2س}{1+3س^{2}} = 2س - 6س^{3} + 18س^{5} - \frac{54س^{7}}{1+3س^{2}}$

تقسیم کیا

$$
\begin{array}{r}
2س - 6س^{3} + 18س^{5} \\
1+3س^{2} \,\big)\, 2س \\
2س + 6س^{3} \\
\hline
-6س^{3} \\
-6س^{3} - 18س^{5} \\
\hline
18س^{5} \\
18س^{5} + 54س^{7} \\
\hline
-54س^{7}
\end{array}
$$

یہاں جتنا چاہے تقسیم کر کے حاصل تقسیم میں حدود کا اضافہ کیا جا سکتا، و ہم جس حد پہ چاہیں وقف کر سکتے ہیں اس مکسور کو بقیہ بنا کے جس کا ما فوق پچھلا بقیہ ہو و ما تحت مقسوم بہ ہو۔

تو اگر ہم حاصل تقسیم کی چار حد تک عمل کرتے ہیں تو ہمیں ملے گا۔

$$\frac{2س}{1+3س^2} = 2س - 6س^3 + 18س^5 - 54س^7 + \frac{162س^9}{1+3س^2}$$

حاصل تقسیم میں موجود حدود مکسور بھی ہو سکتی ہیں تو اگر $س^2$ کو $س^3-ع^3$ سے تقسیم کیا جائے، تو حاصل تقسیم کی اول چار حدود ہوں گی $\frac{1}{س} + \frac{ع^3}{س^4} + \frac{ع^6}{س^7} + \frac{ع^9}{س^{10}}$ و بقیہ ہوگا $\frac{ع^{12}}{س^{10}}$ ۔

184. ضرب و تقسیم کی متفرق مثالیں جو مکسور کی تخفیف کے گزشتہ قواعد سے حل کی جا سکتی ہیں۔

مثال: $س+2ع - \frac{ع^2}{2س+3ع}$ میں $2س-ع - \frac{2ع^2}{س+ع}$ کو ضرب دو۔

حاصل ضرب ہوا $\left(س+2ع - \frac{ع^2}{2س+3ع}\right) \times \left(2س-ع - \frac{2ع^2}{س+ع}\right)$

$$= \frac{2س^2+7سع+6ع^2-ع^2}{2س+3ع} \times \frac{2س^2+سع-ع^2-2ع^2}{س+ع}$$

$$= \frac{2س^2+7سع+5ع^2}{2س+3ع} \times \frac{2س^2+سع-3ع^2}{س+ع}$$

$$= \frac{(2س+5ع)(س+ع)}{2س+3ع} \times \frac{(2س+3ع)(س-ع)}{س+ع}$$

= (2س+5ع)(س-ع)

185. یہاں مصنف نے تمارین ذکر کیا تھا جنہیں مترجم نے ترک کر دیا ہے۔

باب تئیسواں: مکسورات دشوار

186. اس باب میں ہم متفرق مساوات کے مجموعہ کو ذکر کریں گے جن میں سے بعض ان قواعد کی مشق کے لیے، جو سابقہ ابواب میں ذکر کیے گئے ہیں، کارآمد ہوں گی۔ و ہم نے بعض ایسی مساوات کا اضافہ کیا ہے جو زیادہ دشوار ہیں و ان کے حل کے لیے مخصوص حیلے اختیار کرنا پڑتا ہے۔
درج ذیل مثالیں جو کامل طور پہ حل کی گئی ہیں، وہ سب سے زیادہ کارآمد طریقوں کو نمایا کرتی ہیں۔

مثال اول: حل کرو $\frac{6\text{س}-3}{2\text{س}+7} = \frac{3\text{س}-2}{\text{س}+5}$

ضرب سے حاصل ہوا $(6\text{س}-3)(\text{س}+5) = (3\text{س}-2)(2\text{س}+7)$

$$6\text{س}^2+27\text{س}-15 = 6\text{س}^2+17\text{س}-14$$

$$\therefore 10\text{س} = 1$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{10}$$

تنبیہ: بہت سی مساوات تخفیف کر کے اس شکل پہ لائی جا سکتی ہیں جس میں مساوات مذکور ذکر کی گئی ہے۔ جب معاملہ ایسا ہے تو خلاف میں ضرب دے کے بآسانی مسئلہ حل کیا جا سکتا ہے۔

مثال دوم: حل کرو $\frac{8\text{س}+23}{20} - \frac{5\text{س}+2}{3\text{س}+4} = \frac{2\text{س}+3}{5} - 1$

دونوں جانب میں 20 کو ضرب دیا تو حاصل ہوا

$$20-12+\text{س}8 = \frac{(2+\text{س}5)20}{4+\text{س}3} - 23+\text{س}8$$

منتقل کیا تو ہوا $\quad 31 = \dfrac{(2+\text{س}5)20}{4+\text{س}3}$

خلاف جانب میں ضرب دیا تو $(2+\text{س}5)20 = 124+\text{س}93$

$$\text{س}7 = 84$$

$$12 = \text{س} \quad \therefore$$

جب دو یا زیادہ مکسورات کے ما تحت ایک ہی ہوں تو وہ ایک ساتھ کر کے حل کیے جا سکتے ہیں.

مثال سوم: حل کرو $\quad 4 + \dfrac{\text{س}\frac{1}{4} - 16}{3+\text{س}} = \dfrac{\frac{1}{3}8+\text{س}23}{5+\text{س}4} + \dfrac{\text{س}2-13}{3+\text{س}}$

$$\frac{\text{س}2+13-\text{س}\frac{1}{4} - 16}{3+\text{س}} = 4 - \frac{\frac{1}{3}8+\text{س}23}{5+\text{س}4}$$

$$\frac{\frac{\text{س}7}{4} + 3}{3+\text{س}} = \frac{\frac{35}{3} - \text{س}7}{5+\text{س}4}$$

خلاف جانب میں ضرب دیا تو ہوا

$$\frac{\text{س}35}{3} +15+{}^{2}\text{س}7+\text{س}12 = 35-\text{س}21+ \frac{\text{س}35}{3} -{}^{2}\text{س}7$$

$$-\frac{137\text{س}}{12} = 50$$

$$\text{س} = -\frac{600}{137}$$

مثال چہارم: حل کرو $\frac{\text{س}-8}{\text{س}-10} + \frac{\text{س}-4}{\text{س}-6} = \frac{\text{س}-5}{\text{س}-7} + \frac{\text{س}-7}{\text{س}-9}$

یہ مساوات مکسورات کو ختم کر کے حل کی سکتی ہے لیکن تب عمل بہت مہنت طلب ہوگا۔ جب کہ درج ذیل طریقہ سے عمل کو کافی مختصر کیا جا سکتا ہے۔

منتقل کیا $\frac{\text{س}-8}{\text{س}-10} - \frac{\text{س}-5}{\text{س}-7} = \frac{\text{س}-7}{\text{س}-9} - \frac{\text{س}-4}{\text{س}-6}$

دونوں جانب کو جدا جدا حل کیا تو ہوا

$$\frac{(\text{س}-8)(\text{س}-7)-(\text{س}-5)(\text{س}-10)}{(\text{س}-10)(\text{س}-7)} = \frac{(\text{س}-7)(\text{س}-6)-(\text{س}-4)(\text{س}-9)}{(\text{س}-9)(\text{س}-6)}$$

$$\frac{\text{س}^2-15\text{س}+56-(\text{س}^2-15\text{س}+50)}{(\text{س}-10)(\text{س}-7)} = \frac{\text{س}^2-13\text{س}+42-(\text{س}^2-13\text{س}+36)}{(\text{س}-9)(\text{س}-6)}$$

$$\frac{6}{(\text{س}-10)(\text{س}-7)} = \frac{6}{(\text{س}-9)(\text{س}-6)}$$

چونکہ ما فوق متساوی ہیں تو ما تحت لا محالہ متساوی ہوں گے

یعنی $(\text{س}-10)(\text{س}-7) = (\text{س}-9)(\text{س}-6)$

$$س^2-17س+70 = س^2-15س+54$$

$$\therefore 2س = 16$$

$$\therefore س = 8$$

مساوات مذکور درج ذیل طریقہ سے بھی خوب صفائی سے حل کی جا سکتی ہیں۔

مساوات کو اس شکل پہ لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{(س-10)+2}{س-10}+\frac{(س-6)+2}{س-6} = \frac{(س-7)+2}{س-7}+\frac{(س-9)+2}{س-9}$$

تو ہوا $$1+\frac{2}{س-10}+1+\frac{2}{س-6} = 1+\frac{2}{س-7}+1+\frac{2}{س-9}$$

جس سے حاصل ہوا $$\frac{1}{س-10}+\frac{1}{س-6} = \frac{1}{س-7}+\frac{1}{س-9}$$

منتقل کیا تو ہوا $$\frac{1}{س-10}-\frac{1}{س-7} = \frac{1}{س-9}-\frac{1}{س-6}$$

$$\therefore \frac{3}{(س-10)(س-7)} = \frac{3}{(س-9)(س-6)}$$

و باقی مسئلہ پچھلے کے مثل حل ہوگا۔

مثال پنجم: حل کرو $$\frac{5س-64}{س-13}-\frac{2س-11}{س-6} = \frac{4س-55}{س-14}-\frac{س-6}{س-7}$$

$$\left(\frac{1}{7-\text{س}}+1\right)-\frac{1}{14-\text{س}}+4=\left(\frac{1}{6-\text{س}}+2\right)-\frac{1}{13-\text{س}}+5$$

$$\frac{1}{7-\text{س}}-\frac{1}{14-\text{س}}=\frac{1}{6-\text{س}}-\frac{1}{13-\text{س}}$$

دونوں جانب کی جدا جدا تبسیط کیا تو ہوا

$$\frac{7}{(7-\text{س})(14-\text{س})}=\frac{7}{(6-\text{س})(13-\text{س})}$$

$$(7-\text{س})(14-\text{س})=(6-\text{س})(13-\text{س})$$

$$98+\text{س}21-{}^2\text{س}=78+\text{س}19-{}^2\text{س}$$

$$20=\text{س}2$$

$$10=\text{س}\ \therefore$$

187. جو مساوات ہم نے یہاں ذکر کیا ان میں ضریب رقمی تھے، لیکن بہت سی مساوات میں خالص ضریب حرفی ہوتے ہیں [مضمون 6]۔ تو یہ حل مسئلہ میں ظاہر کیے جانے چاہیے۔

مثال اول: حل کرو (س+ع)(س+ب)-ج(ع+ج) = (س-ج)(س+ج)+عب

ضرب دے کے حاصل ہوا س²+عس+بس+عب-عج-ج² = س²-ج²+عب

تو ہوا عس+بس = عج

س(ع+ب) = عج

$$\therefore\ \text{س}=\frac{\text{عج}}{\text{ع+ب}}$$

مثال دوم: $\frac{ع}{س-ع} - \frac{بـ}{س-بـ} = \frac{ع-بـ}{س-جـ}$ حل کرو

داہنے جانب کو حل کر کے حاصل ہوا

$$\frac{ع(س-بـ)-بـ(س-ع)}{(س-ع)(س-بـ)} = \frac{ع-بـ}{س-جـ}$$

$$\frac{س(ع-بـ)}{(س-ع)(س-بـ)} = \frac{ع-بـ}{س-جـ}$$

$$\frac{س}{(س-ع)(س-بـ)} = \frac{1}{س-جـ}$$

خلاف سے ضرب دیا تو آیا $س^2-جـس = س^2-عس-بـس+عبـ$

$$عس+بـس-جـس = عبـ$$

$$(ع+بـ-جـ)س = عبـ$$

$$س = \frac{عبـ}{ع+بـ-جـ}$$

مثال سوم: حل کرو $عس+بـڡ = جـ$ ....(1)

$ع'س+بـ'ڡ = جـ'$ ....(2)

علامت جو یہاں پہلی مرتبہ استعمال ہوئی ہے، اس کو طالب علم اپنے مطالعہ میں باربار دیکھے گا۔ پہلی مساوات میں ہم نے س و ڡ کے ضریب کے طور پہ بعض حروف اختیار کیے ہیں۔ و وہی حروف دوسری مساوات میں

کامائے مقلوب کے ساتھ اختیار کیے ہیں مقادیرِ مطابق کے لیے۔ ع و ع' کی قیمت کے درمیان کوئی تعلق ضروری نہیں ہے، و وہ ع و بـ کی طرح مختلف ہیں۔ لیکن یہاں ایک ہی حرف کو استعمال کیا ہے کیونکہ اس سے کسی طرح کے معنئ مشترک کا خیال پیدا ہوتا ہے۔ و ع و ع' میں ایک صفتِ مشترک ہے کہ دونوں ہی سـ کے ضریب ہیں، و بـ و بـ' ضریب ہیں فـ کے۔

کبھی کامائے مقلوب کے بجائے حروف کو لاحقہ کے ساتھ استعمال کرتے ہیں جیسے ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$؛ بـ$_1$، بـ$_2$، بـ$_3$ وغیرہ۔

مساوات پہ لوٹتے ہیں عسـ+بـفـ = جـ ....(1)

ع'سـ+بـ'فـ = جـ' ....(2)

ضرب دیا (1) میں بـ' کو و (2) میں بـ کو تو ہوا

عبـ'سـ+بـبـ'فـ = بـ'جـ

ع'بـسـ+بـبـ'فـ = بـجـ'

تفریق کیا   (عبـ'-ع'بـ)سـ = بـ'جـ-بـجـ'

سـ = (بـ'جـ - بـجـ') / (عبـ'-ع'بـ)   ....(3)

جیسا کہ مضمون 104 میں بیان کیا گیا کہ ہم سـ کی اس قیمت کو (1) یا (2) میں سے کسی بھی مساوات میں رکھ کے فـ کی قیمت حاصل کر سکتے

ہیں؛ لیکن ﮨ مزید سہولت سے حاصل کیا جا سکتا ہے ﺳ کو زائل کر کے درج ذیل طریقہ سے۔

ضرب دیا (1) میں ء' کو، و (2) میں ء کو تو ہوا

ءء'ﺳ+ء'بـﮨ = ء'جِ

ءء'ﺳ+ءبـ'ﮨ = ءجِ'

تفریق کیا (ء'بـ-ءبـ')ﮨ = ء'جِ-ءجِ'

ﮨ = (ء'جِ - ءجِ') / (ء'بـ-ءبـ')

پھر ما تحت کے اعتبار سے علامات تبدیل کر کے، تاکہ ماتحت (3) کے مشترک ہو جائے، ہوا۔

ﮨ = (ءجِ' - ء'جِ) / (ءبـ'-ء'بـ) و ﺳ = (بـ'جِ - بـجِ') / (ءبـ'-ء'بـ)

مثال چہارم: حل کرو (ﺳ-ء) / (جِ-ء) + (ﮨ-بـ) / (جِ-بـ) = 1 ....(1)

(ﺳ+ء) / جِ + (ﮨ-ء) / (ء-بـ) = ء / جِ ....(2)

از (1) مکسور کو ختم کر کے ہمیں حاصل ہوا

ﺳ(جِ-بـ)-ء(جِ-بـ)+ﮨ(جِ-ء)-بـ(جِ-ء) = (جِ-ء)(جِ-بـ)

ﺳ(جِ-بـ)+ﮨ(جِ-ء) = ءجِ-ءبـ+بـجِ-ءبـ+جِ^{2}-ءجِ-بـجِ+ءبـ

ﺳ(جِ-بـ)+ﮨ(جِ-ء) = جِ^{2}-ءبـ ....(3)

و (2) سے حاصل ہوا س(ع-بـ)+ع(ع-بـ)+جف-جع = ع(ع-بـ)

س(ع-بـ)+جف = عج ....(4)

ضرب دیا (3) میں ج کو و (4) میں ج-ع کو، پھر تفریق کیا۔

س{ج(ج-بـ)-(ج-ع)(ع-بـ)} = ج^3-عبـج-عج(ج-ع)

س(ج^2-عج+ع^2-عبـ) = ج(ج^2-عبـ-عج+ع^2)

∴ س=ج

و لہذا (4) سے۔ ف=بـ ۔

باب چوبیسواں: مسائلِ دشوار

188. گزشتہ ابواب میں ہم نے ایسے مسائل کا مجموعات ذکر کیا تھا جو مساوات بسیط تک پہنچانے والے تھے۔ اب یہاں ہم ایسے مثالیں ذکر کر رہے ہیں جو زیادہ دشوار ہیں۔

مثال اول: 4 و 5 بجے کے درمیان کس وقت منٹ کی سوئی گھنٹے کی سوئی سے 13 منٹ آگے ہوگی؟

فرض کرو کہ ﺳ منٹ کی وہ مقدار ہے جو مطلوب ہے 4 بجے کے بعد۔ و چونکہ منٹ کی سوئی گھنٹے کی سوئی سے 12 گنا تیز چلتی ہے، تو گھنٹے کی سوئی ﺳ منٹ میں $\frac{\text{ﺳ}}{12}$ منٹ حصے منتقل ہوگی۔

4 بجے منٹ کی سوئی گھنٹے کی سوئی سے 20 حصے پیچھے تھی، پھر وہ اس سے 13 حصے آگے ہو گئی، یعنی منٹ کی سوئی منتقل ہوئی 20 + 13 یا 33 حصے زیادہ گھنٹے کی سوئی سے۔

تو ہوا $\text{ﺳ} = \frac{\text{ﺳ}}{12} + 33$

$$\frac{11}{12}\text{ﺳ} = 33$$

$$\therefore \text{ﺳ} = 36$$

لہذا وقت جو مطلوب تھا وہ ہوا 36 منٹ 4 کے بعد۔

اگر سوال یہ ہوتا کہ "4 و 5 بجے کے درمیان کس وقت دونوں سوئی کے درمیان 13 منٹ کا فاصلہ ہوگا؟" تو ہم اس حالت کا بھی اعتبار کرتے جب منٹ کی سوئی گھنٹے سے 13 حصے پیچھے تھی۔ و اس مسئلہ میں منٹ کی سوئی 20 - 13 یا 7 حصے زیادہ چلتی۔

لہذا $س = \frac{س}{12} + 7$

$س = 7\frac{7}{11}$

لہذا اوقات ہوتے $7\frac{7'}{11}$ 4 کے بعد، و 36' 4 کے بعد۔

مثال دوم: أ و ب دو لوگوں نے دو مختلف مقام سے، جن کے درمیان ج میل کا فاصلہ ہے، ایک ساتھ ایک ہی جہت میں چلنا شروع کیا۔ أ ض میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چلا، و ب ق میٹر فی گھنٹہ سے۔ تو بتاو کہ أ ب پہ سبقت کرنے سے قبل کتنا چلا؟

فرض کرو کہ أ س میل چلا تو ب س-ج میل چلا۔

أ ض میل فی گھنٹہ چلتا ہے تو س میل $\frac{س}{ض}$ گھنٹے میں چلے گا۔ و ب س-ج میل $\frac{س-ج}{ق}$ گھنٹے میں چلے گا۔ و یہ دونوں اوقات متساوی ہیں۔

تو ہوا $\frac{س}{ض} = \frac{س-ج}{ق}$

$قس = ضس - ضج$

تو ہوا س = $\frac{ضج}{ض-ق}$

لہٰذا أ چلا $\frac{ضج}{ض-ق}$ میل

مثال سوم: ایک ریل گاڑی نے یکساں رفتار سے ایک مسافت عبور کیا۔ اگر رفتار 6 میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو سفر میں 4 گھنٹے کم لگتے۔ و اگر 6 میل فی گھنٹہ کم ہوتی تو سفر میں 6 گھنٹے مزید لگتے۔ تو بتاو مسافت کتنی ہے؟

فرض کرو کہ ریل گاڑی کی رفتار س میل فی گھنٹہ ہے، و جو وقت لگا وہ ف گھنٹہ ہے۔ تو مسافت جو ریل گاڑی نے عبور کیا وہ سف سے تعبیر کی جائے گی۔

پہلے افتراض کے مطابق رفتار فی گھنٹہ س+6 میل ہوگی، و سفر کا وقت ف-4 گھنٹے ہوگا۔ اس صورت حال میں مسافت جو عبور کی گئی وہ (س+6)(ف-4) میل سے تعبیر کی جائے گی۔

و دوسرے افتراض میں وہ مسافت جو عبور کی گئی (س-6)(ف+6) میل سے تعبیر کی جائے گی۔

مسافت کی یہ تمام تعبیرات لازماً متساوی ہوں گی۔

∴ سف = (س+6)(ف-4) = (س-6)(ف+6)

ان مساوات سے حاصل ہوا

سف = سف+6ف-4س-24

یا 6ف-4س = 24 ....(1)

و سف = سف-6ف+6س-36

یا 6س-6ف = 36 ....(2)

از (1) و (2) حاصل ہوا س=30، ف=24

لہذا مسافت ہوئی 720 میل۔

باب پچیسواں: مساوات تربیعی

189. فرض کرو کہ درج ذیل مسئلہ، حل کرنے کے لیے پیش کیا گیا ہے، ایک تاجر 280 رپیہ میں کچھ گھوڑے خرید کر لایا۔ اگر اتنی ہی قیمت میں وہ چار کم لاتا تو ہر ایک 8 رپیے مہنگا پڑتا۔ بتاو اس نے کتنا گھوڑا خریدہ؟

فرض کرو کہ س = گھوڑوں کی مقدار مطلوب،

تو $\frac{280}{\text{س}}$ = وہ رپیے جو ایک کی قیمت ہیں۔

اگر وہ 4 کم لاتا تو اس کے پاس س-4 گھوڑے ہوتے، و ہر ایک کی قیمت $\frac{280}{\text{س}-4}$ روپیے ہوتی۔

$$\therefore \frac{280}{\text{س}-4} = \frac{280}{\text{س}} + 8$$

تو ہوا $\text{س}(\text{س}-4)+35(\text{س}-4) = 35\text{س}$

$$\therefore \text{س}^2-4\text{س}+35\text{س}-140 = 35\text{س}$$

$$\therefore \text{س}^2-4\text{س} = 140$$

یہاں ہمیں ایک ایسی مساوات حاصل ہوئی جس میں مقدار مجہول کا مربع شامل ہے؛ و اس مسئلہ کو مکمل حل کرنے کے لیے ہمیں ایسا طریقہ تلاشنا ہوگا جو ایسی مساوات کو حل کر سکے۔

190. **تعریف:** وہ مساوات جس میں مقدار مجہول کا مربع شامل ہو لیکن اس کے اوپر کی کوئی قدر نہ ہو تو وہ **مساواتِ تربیعی** یا **دوسرے درجہ کی مساوات** کہلاتی ہے۔ اگر مساوات مقدار مجہول کے مربع و قردِ ایک دونوں کو متضمن ہو تو **غیر خالص تربیعی** کہلائے گی، و اگر خالص مربع کو متضمن ہو تو **خالص تربیعی** کہلائے گی۔

لہذا $2س^2-5س = 3$ ایک غیر خالص تربیعی ہے۔

و $5س^2 = 20$ ایک خالص تربیعی ہے۔

191. تربیعی خالص کو ایک مساوات بسیط کے طور پہ دیکھا جا سکتا ہے جس میں مقدار مجہول کا مربع تلاشنا ہے۔

مثال: حل کرو $\frac{9}{س^2-27} = \frac{25}{س^2-11}$

جانب خلاف میں ضرب دیا تو $9س^2-99 = 25س^2-675$

$\therefore 16س^2 = 576$

$\therefore س^2 = 36$

و ان متساوات کا جذر مربع نکالا تو ہمیں ملا $س = \pm 6$

تنبیہ: ہم نے بائیں جانب عدد سے قبل دو علامات لگایا ہے جس کی وجہ مضمون 117 میں مذکور ہے۔

192. مساوات س^2=36 میں، دونوں جانب کا جذر مربع نکالنے پہ ہمیں دونوں علامات دونون جانب کی مقدار پہ داخل کرنا چاہیے تھا، و لکھنا چاہیے تھا کہ ±س = ±6۔

لیکن مختلف مسائل میں غور کر نے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ غیر ضروری ہے، اس لیے کہ ±س = ±6 سے چار حالتیں بنتی ہیں

+س = +6 ، +س = -6 ، -س = +6 ، -س = -6

و یہ سب دو میں شامل ہیں جو مذکور ہیں یعنی س = +6 و س = -6

لہذا جب ہم نے مساوات کے دونوں جانب کا جذر مربع نکالا تو ایک جانب جذر مربع کے قبل علامت وضع کرنا کافی ہو گیا۔

193. مساوات س^2=36 مساواتِ تربیعی کی صورت بسیط کی ایک نظیر ہے۔ و مساوات (س-3)^2=25 بھی ایسے ہی طریقہ سے حل ہو سکتی ہے۔ دونوں جانب کاجذر مربع اخذ کرنے پہ ہمیں دو مساوات بسیط حاصل ہوئیں۔

س-3 = ±5

علامات جمع کے مطابق۔ س-3 = +5 تو س=8

علامات تفریق کے مطابق س-3 = -5 تو س=-2

تو حل ہوا س = 8 یا -2

اب مساوات مذکور (س-3)^2 = 25

کو لکھا جا سکتا ہے س^2-6س+(3)^2 = 25

یا س^2-6س = 16

تو اس عمل کے اقدام میں نظر کر نے سے معلوم ہوا کہ مساوات

س^2-6س = 16 کو جانبیں میں اولاً 3^2 یعنی 9 جمع کر کے پھر جذر مربع

نکال کے حل کیا جا سکتا ہے۔ و دونوں جانب میں 3^2 کو جمع کرنے کی وجہ

یہ ہے کہ یہ مقدار جب داہنے جانب میں جمع ہوگی تو اسے مربع کامل بنائے

گی۔

تو اب ع خواہ کوئی بھی مقدار ہو

س^2+2عس+ع^2 = (س+ع)^2

و س^2-2عس+ع^2 = (س-ع)^2

تو اگر ایک تین حدی عبارت مربعِ کامل ہو و اس کی اعلی قدر س^2 کا ضریب

1 ہو۔ تو اس میں س کے بغیر ایک ایسی حد ضرور ہوگی جو س کے ضریب

کے نصف کا مربع ہوگی۔ و اگر عبارت میں س^2 و س مذکور ہوں تو س کے

ضریب کے نصف کا مربع جمع کر کے عبارت مکمل کی جا سکتی ہے۔

تنبیہ: جب عبارت مربعِ کامل ہو تو حدود ہمیشہ ایجابی ہوں گی [مضمون

114 کی تنبیہ] لہذا اگر ضروری ہو تو مربع کی تکمیل سے قبل س^2 کا

ضریب +1 کے متساوی کیا جائے۔

مثال اول: حل کرو $س^2 + 14س = 32$

نصف 14 کا مربع ہوا 7^2

$$\therefore س^2 + 14س + 7^2 = 32 + 49$$

$$(س + 7)^2 = 81$$

$$\therefore س + 7 = \pm 9$$

$$\therefore س = -7 + 9 \text{ یا } -7 - 9$$

$$\therefore س = 2 \text{ یا } -16$$

مثال دوم: حل کرو $7س = س^2 - 8$

منتقل کیا تاکہ س والی حدود ایک جانب ہو جائیں و مربع ایجابی ہو جائے

لہذا $س^2 - 7س = 8$

مربع کو مکمل کیا، $س^2 - 7س + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 8 + \frac{49}{4}$

یعنی $\left(س - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

$$\therefore س - \frac{7}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$\therefore س = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$$\therefore س = 8 \text{ یا } -1$$

تنبیہ: ہم نے $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ میں داہنے جانب کوئی عمل نہیں کیا۔

194. ہم نے دیکھا کہ مربع کو باسہولت تمام کیا جا سکتا ہے جب س کا ضریب 1 ہو۔ تمام مسائل اس شکل پہ لائے جا سکتے ہیں کل مساوات کو س^2 کے ضریب سے تقسیم کر کے۔

مثال اول: حل کرو $32 - 3\text{س}^2 = 10\text{س}$

منتقل کیا $3\text{س}^2 + 10\text{س} = 32$

کل کو 3 سے تقسیم کیا تاکہ س^2 کا ضریب 1 ہو جائے

لہذا $\text{س}^2 + \frac{10}{3}\text{س} = \frac{32}{3}$

مربع کو تمام کیا $\text{س}^2 + \frac{10}{3}\text{س} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{32}{3} + \frac{25}{9}$

یعنی $\left(\text{س} + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{121}{9}$

$$\text{س} + \frac{5}{3} = \pm\frac{11}{3}$$

$$\therefore \text{س} = -\frac{5}{3} \pm \frac{11}{3} = 2 \text{ یا } -5\frac{1}{3}$$

تنبیہ: ہم نے داہنے جانب $\left(\frac{10}{6}\right)^2$ نہیں بڑھایا بلکہ $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ بڑھایا۔

مثال دوم: حل کرو $5\text{س}^2+11\text{س}=12$

5 سے تقسیم کیا تو $\text{س}^2+\frac{11}{5}\text{س}=\frac{12}{5}$

مربع کو تمام کیا، $\text{س}^2+\frac{11}{5}\text{س}+\left(\frac{11}{10}\right)^2=\frac{12}{5}+\frac{121}{100}$

یعنی $\left(\text{س}+\frac{11}{10}\right)^2=\frac{361}{100}$

$$\therefore \text{س}+\frac{11}{10}=\pm\frac{19}{10}$$

$$\therefore \text{س}=-\frac{11}{10}\pm\frac{19}{10}=\frac{4}{5}$$ یا -3

195. تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ تربیعۂ غیر خالص کو حل کرنے کے لیے درج ذیل اقدام مطلوب ہیں۔

(1) اگر ضروری ہو تو مساوات میں تبسیط کرو تا کہ حدود جن میں س^2 و س ہیں، ایک ساتھ آ جائیں، و بنا س کی حدود دوسرے جانب چلی جائیں۔

(2) کل مساوات کو س^2 کے ضریب سے تقسیم کر کے، س^2 کے ضریب کو 1 و ایجابی بناو۔

(3) مساوات کے دونوں جانب س کے ضریب کے نصف کا مربع جمع کرو۔

(4) دونوں جانب کے جذر مربع کو اخذ کرو۔

(5) پھر اس مساوات بسیط کو حل کرو جو حاصل ہوئی ہے۔

196. جو مثالیں آگے مذکور ہیں ان میں بعض ابتدائی تخفیف و تبسیط کرنا ضروری ہے۔

مثال اول: حل کرو $\frac{3س-2}{2س-3} = \frac{5س}{س+4} - 2$

تبسیط کیا $\frac{3س-2}{2س-3} = \frac{3س-8}{س+4}$

خلاف جوانب میں ضرب دیا تو $3س^2+10س-8 = 6س^2-25س+24$

یعنی $-3س^2+35س = 32$

-3 سے تقسیم کیا، $س^2 - \frac{35}{3}س = -\frac{32}{3}$

مربع کو تمام کیا، $س^2 - \frac{35}{3}س + \left(\frac{35}{6}\right)^2 = \frac{1225}{36} - \frac{32}{3}$

یعنی $\left(س - \frac{35}{6}\right)^2 = \frac{841}{36}$

$\therefore س - \frac{35}{6} = \pm \frac{29}{6}$

$\therefore س = 10\frac{2}{3}$ یا 1

مثال دوم: حل کرو $7(س+2ع)^2+3ع^2 = 5ع(7س+23ع)$

تبسیط کیا، $7س^2+28عس+28ع^2+3ع^2 = 35عس+115ع^2$

یعنی $7س^2-7عس = 84ع^2$

و تب $س^2-عس = 12ع^2$

مربع کو مکمل کیا، $س^2 - عس + \left(\frac{ع}{2}\right)^2 = 12ع^2 + \frac{ع^2}{4}$

یعنی $\left(س - \frac{ع}{2}\right)^2 = \frac{49ع^2}{4}$

$$س - \frac{ع}{2} = \pm \frac{7ع}{2}$$

$\therefore$ $س = 4ع$ یا $-3ع$

197. جتنی بھی نظیریں یہاں ذکر کی گئیں، سب میں مساوات تربیعی کے دو جذر تھے؛ لیکن بعض اوقات حل خالص ایک ہی ہوتا ہے۔ لہذا اگر $س^2-2س+1 = 0$۔ تو ہوا $(س-1)^2 = 0$، تب خالص $س=1$ حل ہوگا، خیر اس جیسے مسائل میں ہمارے لیے یہ کہنا مناسب ہوتا ہے کہ تربیعی کی دو متساوی جذور ہیں۔

198. امثلہ گزشتہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر تربیعی مناسب تخفیف و انتقال کے بعد درج ذیل شکل پہ تعبیر کی جا سکتی ہے۔

$$عس^2+بس+ج = 0$$

پھر چاہے ع، بـ، جـ کی قیمت عددی کچھ بھی ہو۔ لہذا اگر ہم اس تربیعی کو حل کر سکے تو دیگر کوئی بھی حل کر سکتے ہیں۔

منتقل کیا $\quad ع س^2 + ب س = -ج$

ع سے تقسیم کیا، $س^2 + \frac{ب}{ع} س = -\frac{ج}{ع}$

دونوں جانب میں $\left(\frac{ب}{2ع}\right)^2$ جمع کر کے مربع کو مکمل کیا

$$س^2 + \frac{ب}{ع} س + \left(\frac{ب}{2ع}\right)^2 = \frac{ب^2}{4ع^2} - \frac{ج}{ع}$$

یعنی $\quad \left(س + \frac{ب}{2ع}\right)^2 = \frac{ب^2 - 4عج}{4ع^2}$

جذر مربع کو اخذ کیا $\quad س + \frac{ب}{2ع} = \frac{\pm\sqrt{(ب^2 - 4عج)}}{2ع}$

$$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{(ب^2 - 4عج)}}{2ع}$$

199. ہر جزئی مسئلہ میں مربع کو تمام کرنے کے بجائے اب ہم یہ فارمولۂ کلیہ استعمال کریں گے۔ و اس کو مسئلہ میں جاری کریں گے ع، ب، ج کی قیمت وضع کرتے ہوئے۔

مثال: حل کرو $5س^2 + 11س - 12 = 0$

یہاں ع=5، ب=11، ج=-12

$$\therefore \text{س} = \frac{-11 \pm \sqrt{(11^2 - 4\times5\times(-12))}}{10}$$

$$= \frac{-11 \pm \sqrt{361}}{10} = \frac{-11 \pm 19}{10}$$

$$= \frac{4}{5} \text{ یا } -3$$

جو مطابق ہے مضمون 194 کی مثال دوم کے حل کے۔

200. نتیجہ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{(\text{ب}^2 - 4\text{عج})}}{2\text{ع}}$ کے بارے میں

یہ بات ذہن نشین ہونی چاہیے کہ عبارت $\sqrt{(\text{ب}^2 - 4\text{عج})}$ جذر مربع ہے کل مقدار مرکب $\text{ب}^2 - 4\text{عج}$ کی۔ ہم تب تک حل کی تبسیط نہیں کر سکتے جب تک ہمیں ع، ب، ج کی قیمت معلوم نہ ہوں۔ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ یہ قیمتیں $\text{ب}^2 - 4\text{عج}$ کو مربع کامل نہیں بناتیں، تو اس صورت حال میں مساوات کا سٹیک حل عددی معلوم نہیں ہو پاتا۔

مثال اول: حل کرو $5\text{س}^2 - 15\text{س} + 11 = 0$

حاصل ہوا $\text{س} = \frac{15 \pm \sqrt{((-15)^2 - 4\times5\times11)}}{2\times5}$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{5}}{10}$$

اب $\sqrt{5} = 2.236$ تقریباً

$$\text{س} = \frac{15 \pm 2.236}{10} = 1.7236 \text{ یا } 1.2764$$

یہ حل اعشاریہ کے بعد خالص چار مقام تک صحیح ہیں، و ان میں سے کوئی بھی عبارت کو مکمل تمام نہیں کر رہا ہے۔

جب تک مقدار مجہول کی قیمت عددی مطلوب نہ ہو تو عموماً جذر کو شکل ذیل پہ چھوڑ دیا جاتا ہے۔

$$\frac{15 + \sqrt{5}}{10} \text{ ، } \frac{15 - \sqrt{5}}{10}$$

مثال دوم: حل کرو $\text{س}^2 - 3\text{س} + 5 = 0$

تو ہوا $\text{س} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{(9-20)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

مگر -11 کا کوئی سٹیک جذر مربع نہیں ہے [مضمون 117] تو لا کی کوئی بھی ایسی قیمت نہیں ہو سکتی جو عبارت کو تمام کرے۔ و ایسی صورت حال میں جذر کو **خیالی** کہا جاتا ہے۔

201. تربیعی کا حل نکالنے کا ایک طریقہ ابھی باقی ہے جو بعض اوقات طرق مذکور سے مختصر ہوتا ہے۔

ایک مساوات فرض کرو کہ $س^2 + \frac{7}{3}س = 2$

مکسور کو ختم کیا تو $3س^2+7س-6 = 0$ ....(1)

داہنے جانب کا تجزیہ کیا تو $(3س-2)(س+2) = 0$

اب اگر کوئی بھی جز ضربی 3س-2، س+3 صفر ہوگا تو ان کا حاصل ضرب بھی صفر ہوگا۔ تو مساوات تربیعی دونوں افتراضات میں سے کسی سے بھی تمام ہو سکتی ہیں۔

3س-2 = 0 یا س+3 = 0

تو جذور ہوئے $\frac{2}{3}$ یا -3

اس سے ظاہر ہوا کہ جب مساوات تربیعی میں تبسیط کر کے اسے مساوات (1) کی شکل پہ تعبیر کیا جاتا ہے، تو اس کا مربعِ کامل بآسانی حاصل ہو سکتا ہے اگر داہنے جانب والی عبارت کا تجزیہ کیا جائے۔ ان میں ہر جز

ضربی جو صفر کے متساوی ہے مساوات بسیط بنائے گا و اس کے مطابق تربیعی کی جذر دے گا۔

مثال اول: حل کرو $2س^2-عس+2بس = عب$

منتقل کیا تاکہ تمام حدود ایک جانب ہو جائیں

$$2س^2-عس+2بس-عب = 0$$

تو $2س^2-عس+2بس-عب = س(2س-ع)+ب(2س-ع)$

$$= (2س-ع)(س+ب)$$

لہذا $(2س-ع)(س+ب) = 0$

تب $2س-ع = 0$ یا $س+ب = 0$

$\therefore س = \frac{ع}{2}$ یا $-ب$

مثال دوم: $2(س^2-6) = 3(س-4)$ حل کرو

$$2س^2-12 = 3س-12$$

$$2س^2 = 3س \text{..............(1)}$$

منتقل کیا $2س^2-3س = 0$

$$س(2س-3) = 0$$

$\therefore س=0$ یا $2س-3 = 0$

لہذا جذور ہوئے 0، 3\2

تنبیہ: اوپر عبارت (1) میں ہم دونوں جانب کو لا سے تقسیم کر سکتے تھے و مساواتِ بسیط 2لا=3، حاصل کر سکتے تھے، تب لا = $\frac{3}{2}$ ، جو مساوات مذکور کا ایک حل ہے۔ لیکن طالب کو اس بات کا خصوصی خیال رکھنا چاہیے کہ جب بھی ایک لا تقسیم کر کے کسی مساوات کی تمام حدود سے منسوخ کیا جائے گا تو اس کو نظر انداز نہیں کیا جائے گا۔ چونکہ مساوات لا=0 سے تمام ہو رہی ہے تو وہ ایک جذر ہے۔

202. بعض ایسی عبارات بھی ہوتی ہیں جو حقیقتاً تربیعی نہیں ہوتیں، لیکن اس باب میں بیان کردہ طریقے سے حل کی جا سکتی ہیں۔

مثال اول: $لا^4 - 13لا^2 + 36 = 0$

تجزیہ کیا، $(لا^2-9)(لا^2-4) = 0$

$\therefore$ $لا^2-9 = 0$، $لا^2-4 = 0$

$لا^2 = 9$ یا 4

لا = ± 3 یا ± 2

مثال دوم: حل کرو $لا^2 + 3لا - \frac{20}{لا^2+3لا} = 8$

$لا^2+3لا$ کے لیے ف وضع کیا تو ہوا $ف - \frac{20}{ف} = 8$

یا ف^2-8ف-20 = 0

اس تربیعی سے حاصل ہوا ف = 10 یا -2

∴ س^2+3س = 10 یا -2

لہذ ہمیں دو تربیعی حل کرنے کے حاصل ہوئی، و بالآخر حاصل ہوا

س = -5، 2 یا -1، -2

باب چھبیسواں: مساوات تربیعی متقارن

203. اب ہم مساوات متوازی کو حل کرنے کے بعض کارآمد طرق بیان کریں گے جن میں بعض مساوات پہلے درجہ سے زیادہ کی ہوں گی۔ لیکن کوئی بھی ایسا قاعدہ وضع نہیں کیا جا سکتا جو تمام مسائل پہ جاری ہو۔

مثال اول: حل کرو $س+ف = 15$ ....(1)

$سف = 36$ ....(2)

(1) کو مربع بنا کے حاصل ہوا $س^2+2سف+ف^2 = 225$

و (2) سے $4سف = 144$

تفریق سے حاصل ہوا $س^2-2سف+ف^2 = 81$

جذر مربع اخذ کیا تو ہوا $س-ف = \pm 9$

اس کو (1) سے مرکب کیا تو دو صورت سامنے آئیں

$س+ف = 15$، $س-ف = 9$

$س+ف = 15$، $س-ف = -9$

جس سے ہم نے پایا $س = 12$، $ف = 3$

$س = 3$، $ف = 12$

مثال دوم: حل کرو س-ف = 12 ....(1)

سف = 85 ....(2)

از (1)　　$س^2-2سف+ف^2 = 144$

4سف = 340

جمع کیا　$س^2+2سف+ف^2 = 484$

جذر مربع اخذ کیا س+ف = ±22

اس کو (1) سے ملایا تو دو صورتیں حاصل ہوئیں

س+ف = 22	س+ف = -22
س-ف = 12	س-ف = 12

تو ہوا

س = 17	س = -5
ف = 5	ف = -17

204. یہ کچھ سہل مسائل ہیں، لیکن یہ خصوصا بہت اہم ہیں کیونکہ دیگر بہت سے مسائل کے حل ان پہ مبنی ہیں۔

جیسا کہ قاعدہ ہے کہ ہمارا مقصد مساوات مذکور کو متوازیا حل کرنا ہے س+ف و س-ف کی قیمت معلوم کر کے۔ و امثلہ گزشتہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ہم ایسا کر سکتے ہیں بس مجہولات کا حاصل ضرب معلوم ہونا چاہیے و اس کے ساتھ ان کا اجتماع یا فرق معلوم ہونا چاہیے۔

مثال اول: $س^2+ف^2 = 74$ ....(1)

$سف = 35$ ....(2)

(2) میں 2 کو ضرب دیا، پھر جمع و تفریق سے ہم نے پایا

$$س^2+2سف+ف^2 = 144$$

$$س^2-2سف+ف^2 = 4$$

تب

$$س+ف = \pm 12$$

$$س-ف = \pm 2$$

اب ہمارے پاس چار صورت حال ہوئیں

$$\begin{cases} س+ف = 12 \\ س-ف = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} س+ف = 12 \\ س-ف = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} س+ف = -12 \\ س-ف = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} س+ف = -12 \\ س-ف = -2 \end{cases}$$

جس سے س کی قیمت ہوئی 7، 5، -5، -7

و اسی کے مطابق ف کی قیمت ہوئی 5، 7، -7، -5

مثال دوم: حل کرو $س^2+ف^2 = 185$ ....(1)

$س+ف = 17$ ....(2)

(1) کو (2) کے مربع سے تقسیم کر کے ہمیں حاصل ہوا

$2سف = 104$

$سف = 52$ ....(3)

اب مساوات (2) و (3) مضمون 203 کی مثال اول میں بیان کردہ طریقہ سے حل کی جا سکتی ہیں۔ و اس کا حل ہے۔

س = 13 یا 4
و ف = 4 یا 3

205. درج ذیل صورت کی عبارت کا کوئی جوڑا

$س^2 \pm جسف+ف^2 = ع^2$ ....(1)

$س \pm ف = ب$ ....(2)

جب کہ ج کوئی بھی مقدار عددی ہو سکتی ہے، جو پہلے بیان کردہ کسی بھی شکل میں لائی جا سکتی ہے۔ کیونکہ (2) کو مربع کر کے و (1) سے مرکب کر کے سف معلوم کرنے کے لیے ایک مساوات حاصل ہوگی۔ پھر حل کو مساوات (2) کی مدد سے مکمل کیا جا سکے گا۔

مثال اول: حل کرو $س^3-ف^3 = 999$ ....(1)

$س-ف = 3$ ....(2)

تقسیم کر کے $س^2 + سف + ف^2 = 333$ ....(3)

از (2) $س^2 - 2سف + ف^2 = 9$

تفریق کر کے $3سف = 324$

$سف = 108$ ....(4)

(2) و (4) سے

$$\begin{cases} س = 12 \text{ یا } -9 \\ ف = 9 \text{ یا } -12 \end{cases}$$

مثال دوم: حل کرو $س^4 + س^2ف^2 + ف^4 = 2613$ ....(1)

$س^2 + سف + ف^2 = 67$ ....(2)

(1) کو (2) سے تقسیم کیا، $س^2 - سف + ف^2 = 39$ ....(3)

(2) و (3) کو جمع کیا، $س^2 + ف^2 = 53$

(2) سے (3) کو مفرق کیا، $سف = 9$

$$\text{تب } \begin{cases} س = \pm 7 ، \pm 2 \\ ف = \pm 2 ، \pm 7 \end{cases}$$

[مضمون 204، مثال اول]

مثال سوم: حل کرو $\frac{1}{س} - \frac{1}{ف} = \frac{1}{3}$ ....(1)

$\frac{1}{س^2} + \frac{1}{ف^2} = \frac{5}{9}$ ....(2)

از (1) مربع کر کے $\frac{1}{س^2} - \frac{2}{سف} + \frac{1}{ف^2} = \frac{1}{9}$

و تفریق کر کے $\frac{2}{سف} = \frac{4}{9}$

(2) میں جمع کر کے $\frac{1}{س^2} + \frac{2}{سف} + \frac{1}{ف^2} = 1$

$\therefore \frac{1}{س} + \frac{1}{ف} = \pm 1$

(1) میں مرکب کر کے $\frac{1}{س} = \frac{2}{3}$ یا $-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{ف} = \frac{1}{3}$ یا $-\frac{2}{3}$

$\therefore س = \frac{3}{2}$ یا -3

$ف = 3$ یا $-\frac{3}{2}$

206. جب مساوات ایک ہی درجہ کی ہوں و متجانس ہوں تو درج ذیل طریق ہمیشہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال: حل کو $س^2+سف+2ف^2 = 74$ ....(1)

$2س^2+2سف+ف^2 = 73$ ....(2)

فرض کرو کہ $\text{ف}=\text{م}\text{س}$، پھر اسے دونوں عبارات میں وضع کرو تو

$$\text{س}^2(1+\text{م}+2\text{م}^2) = 74 \quad \text{.........(3)}$$

$$\text{س}^2(2+2\text{م}+\text{م}^2) = 73 \quad \text{.........(4)}$$

تقسیم کر کے $\dfrac{1+\text{م}+2\text{م}^2}{2+2\text{م}+\text{م}^2} = \dfrac{74}{73}$

$$\therefore 73+73\text{م}+146\text{م}^2 = 148+148\text{م}+74\text{م}^2$$

$$\therefore 72\text{م}^2-75\text{م}-75 = 0$$

$$24\text{م}^2-25\text{م}-25 = 0$$

$$(8\text{م}+5)(3\text{م}-5) = 0$$

$$\therefore \text{م} = -\frac{5}{8} \;\text{یا}\; \frac{5}{3}$$

1. فرض کرو کہ $\text{م} = -\dfrac{5}{8}$ ، پھر اس کو (3) یا (4) میں وضع کرو

از (3) $\text{س}^2\left(1 - \dfrac{5}{8} + \dfrac{50}{64}\right) = 74$

$$\therefore \text{س}^2 = \frac{74\times64}{74} = 64$$

$$\therefore \text{س} = \pm8$$

$$\therefore \text{ف} = \text{م}\text{س} = -\frac{5}{8}\text{س} = \pm5$$

2. فرض کرو کہ ھ = $\frac{5}{3}$ ، تو (3) سے

$$\text{س}^2\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{50}{9}\right) = 74$$

$$\text{س}^2 = \frac{9\times 74}{74} = 9$$

$$\therefore \text{س} = \pm 3$$

$$\therefore \text{ف} = \text{ھس} = \frac{5}{3}\text{س} = \pm 5$$

207. جب ایک مساوات پہلے درجہ کی ہو و دوسری زیادہ درجہ کی ہو، تو ہم مساوات بسیط سے ایک مقدار مجہول کے اعتبار سے دوسری مقدار کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں، پھر اس کو دوسری مساوات میں وضع کر کے سکتے ہیں۔

مثال: حل کرو $3\text{س} - 4\text{ف} = 5$ ....(1)

$3\text{س}^2 - \text{سف} - 3\text{ف}^2 = 21$ ....(2)

از (1) ہوا $\text{س} = \frac{5+4\text{ف}}{3}$

و (2) میں وضع کیا تو

$$\frac{3(5+4\text{ف})^2}{9} - \frac{\text{ف}(5+4\text{ف})}{3} - 3\text{ف}^2 = 21$$

$$\therefore 75 + 120\text{ف} + 48\text{ف}^2 - 15\text{ف} - 12\text{ف}^2 - 27\text{ف}^2 = 189$$

9ف^2+105ف-114 = 0

3ف^2+35ف-38 = 0

∴ (ف-1)(3ف+38) = 0

∴ ف = 1 یا- $\frac{38}{3}$

(1) میں وضع کر کے س = 3 یا - $\frac{137}{9}$

208. جو مثالیں ہم نے ذکر کیا عمل کے طریقوں کو بیان کرنے کے لیے کافی ہیں، لیکن بعض مسائل میں خصوصی حیل کرنے پڑتے ہیں۔

مثال اول: حل کرو س^2+4سف+3س = 40-6ف-4ف^2 ....(1)

2سف-س^2 = 3 ....(2)

از (1) حاصل ہوا س^2+4سف+4ف^2+3س+6ف = 40

یعنی (س+2ف)^2+3(س+2ف)-40 = 0

یا ((س+2ف)+8)((س+2ف)-5) = 0

و تب س+2ف = -8 یا 5

1. س+2ف = 5 کو (2) کے ساتھ ملایا تو حاصل ہوا

2س^2-5س+3 = 0

تب س = 1 یا 3\2

و س+2ف = 5 میں وضع کر کے ف = 2 یا 7\4

2. س+2ف = -8 کو (2) سے مرکب کیا تو ہوا

2س²+8س+3 = 0

و تب س = $\frac{-4 \pm \sqrt{10}}{2}$ و ف = $\frac{-12 \pm \sqrt{10}}{4}$

مثال دوم: حل کرو س²ف²-6س = 34-3ف ....(1)

3سف+ف = 2(9+س) ....(2)

از (1) س²ف²-6س+3ف = 34

و از (2)۔ 9سف-6س+3ف = 54

تعریف کر کے س²ف²- 9سف+20 = 0

(سف-5)(سف-4) = 0

∴ سف = 5 یا 4

1. (2) میں وضع کیا سف=5 تو حاصل ہوا ف-2س=3

ان مساوات سے حاصل ہوا س =1 یا - $\frac{5}{2}$
ف = 5 یا -2

2. (2) میں سف=4 کو وضع کیا تو حاصل ہوا ف-2س = 6

ان مساوات سے حاصل ہوا س = $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$
و ف = $3 \pm \sqrt{17}$

باب ستائیسواں: مساوات تربیعی تک لے جانے والے مسائل

209. اب ہم چند ایسے مسائل ذکر کریں گے جو مساوات تربیعی تک لے جانے والے ہیں۔

مثال اول: ایک ریل گاڑی نے ایک ہی رفتار سے 300 میل کا سفر کیا، اگر رفتار 5 میل فی کھنٹا زیادہ ہوتی تو سفر میں 2 گھنٹے کم لگتے۔ ریل گاڑی کی رفتار بتاؤ۔

فرض کرو کہ ریل کی رفتار س میل فی گھنٹہ ہے، تو جو وقت لگا وہ $\frac{300}{\text{س}}$ گھنٹہ ہے۔

دوسرے مفروض کے مطابق وقت ہوا $\frac{300}{\text{س}+5}$ گھنٹے۔

$$\therefore \frac{300}{\text{س}+5} = \frac{300}{\text{س}} - 2$$

و تب $\text{س}^2+5\text{س}-750 = 0$

$$(\text{س}+30)(\text{س}-25) = 0$$

$$\therefore \text{س} = 25 \text{ یا } -30$$

لہذا ریل گاڑی نے 25 میل فی گھنٹہ کا سفر کیا، سلبی قیمت کا اعتبار نہیں۔ ایسا برابر ہوتا ہے کہ مسئلہ کی عبارت جبری ایسے نتیجہ تک لے جاتی ہے جو اس مسئلہ کا جواب نہیں ہو سکتا جس کے بارے میں ہم بحث کر رہے ہیں۔ لیکن ایسے نتائج بعض اوقات مسئلہ کی شرائط میں مناسب ترمیم کر کے واضح کیے جا سکتے ہیں۔ مسئلہ مذکور میں ہم سلبی حل کو درج ذیل طور پہ بیان کر سکتے ہیں۔

چونکہ قیمت ш=25 و -30 مساوات (1) کو تمام کر رہی ہیں، اگر ہم ш کے مقام پہ -ш تحریر کریں، تو نتیجہ میں آنے والی مساوات

$$(2)........\quad 2 - \frac{300}{\text{ш-}} = \frac{300}{\text{5+ш-}}$$

ш = -25 و 30 قیمتوں سے تمام ہوگی۔

اب کل مساوات (2) کی علامات بدلا تو ہوئی $2 + \frac{300}{\text{ш}} = \frac{300}{\text{5-ш}}$

و یہ درج ذیل مسئلہ کی عبارت جبری ہے۔

ایک ریل گاڑی نے یکساں رفتار سے 300 میل کا سفر کیا، اگر رفتار 5 میل فی گھنٹہ کم ہوتی تو سفر میں دو گھنٹے مزید لگتے، تو ریل کی رفتار بتاؤ۔

ریل گاڑی کی رفتار 30 میل فی گھنٹہ ہے۔

مثال دوم: اگر ایک سسٹن دو پایپ سے $33\frac{1}{3}$ منٹوں میں بھرتا ہے، و اگر موٹا پایپ سسٹن بھرنے میں پتلے سے 15 منٹ کم لیتا ہے، تو بتاؤ کہ ان دونوں سے جدا جدا بھرنے میں کتنا وقت لگے گا۔

فرض کرو کہ دو پایپ سسٹن کو جدا جدا س و س-15 منٹ میں بھریں گے۔ و ایک ساتھ سسٹن کا $\frac{1}{س} + \frac{1}{س-15}$، ایک منٹ میں بھریں گے۔ لیکن وہ ایک منٹ میں سسٹن کا $\frac{1}{33\frac{1}{3}}$ یا $\frac{3}{100}$ بھرتے ہیں۔

لہذا $\frac{1}{س} + \frac{1}{س-15} = \frac{3}{100}$

$$100(2س-15) = 3س(س-15)$$

$$3س^2-245س+1500 = 0$$

$$(س-75)(3س-20) = 0$$

$$\therefore س = 75 \text{ یا } 6\frac{2}{3}$$

لہذا پتلا پایپ 75 منٹ لے گا، و موٹا 60 منٹ، و دوسرا حل $6\frac{2}{3}$ غیر معتبر ہے۔

مثال چہارم: ایک سایکل کی چھوٹی پہیا 260 یارڈ کی مسافت میں بڑی پہیا سے 135 دوران زیادہ گھومی۔ و اگر ہر ایک کا محیط ایک فوٹ زیادہ

ہوتا ہے تو چھوٹی پہیا 70 یارڈ کی دوری میں بڑی سے 27 دوران زیادہ کرتی۔ دونوں میں سے ہر ایک پہیے کا محیط بتاؤ۔

فرض کرو کہ چھوٹی پہیا کا محیط س فوٹ ہے و بڑی کا ف فوٹ۔

260 یارڈ کی مسافت میں دونوں پہیا $\frac{780}{س}$ و $\frac{780}{ف}$ دوران کریں گی حسب ترتیب۔

لہذا $\frac{780}{س} - \frac{780}{ف} = 135$

یا $\frac{1}{س} - \frac{1}{ف} = \frac{9}{52}$ ....(1)

ایسے ہی دوسری شرط سے ہم نے پایا

$$\frac{210}{س+1} - \frac{210}{ف+1} = 27$$

یا $\frac{1}{س+1} - \frac{1}{ف+1} = \frac{9}{70}$ ....(2)

از (1) $س = \frac{52ف}{52+9ف}$

و تب۔ $س+1 = \frac{52+61ف}{52+9ف}$

(2) میں وضع کیا $\frac{52+9ف}{52+61ف} - \frac{1}{ف+1} = \frac{9}{70}$

(1+ف)(52+ف61)9 = ²ف9×70

0 = 52-ف113-²ف9

0 = (4+ف9)(13-ف)

∴ ف = 13 یا $-\frac{4}{9}$

ف=13 کرنے سے ہم نے پایا کہ س=4، و ف کی دوسری قیمت غیر معتبر ہے۔

لہذا چھوٹی پہیا کا محیط 4 فوٹ ہے جب کہ بڑی پہیا کا 13 فوٹ۔

مثال پنجم: ایک دریا پہ دو قصبے ہیں جن کے درمیان 24 میل کا فاصلہ ہے۔ ایک شخص آدھا راستہ چل کے و آدھا ناؤ سے رخِ جریاں میں چل کے 5 گھنٹے میں مسافت مکمل کرتا ہے، و رخ خلاف میں 7 گھنٹے میں۔ و اگر کوئی بہاؤ نہ ہو تو دونوں مسافت میں $5\frac{2}{3}$ گھنٹے لگیں گے۔ تو اس کی ناؤ و پیدل چال و بہاؤ کی رفتار بتاؤ۔

فرض کرو کہ وہ شخص س میل فی گھنٹہ چلتا ہے، ناؤ کی رفتار ف میل فی گھنٹہ ہے، و نہر کا بہاؤ ض میل فی گھنٹہ ہے۔ بہاؤ کے جانب میں وہ ف+ض میل فی گھنٹہ ناؤ سے چلتا ہے، و اس کے خلاف ف-ض میل فی گھنٹہ۔

لہذا ہمیں درج ذیل مساوات حاصل ہوئیں۔

$$\frac{12}{\text{س}} + \frac{12}{\text{ف}+\text{ض}} = 5 \quad \text{.........(1)}$$

$$\frac{12}{\text{س}} + \frac{12}{\text{ف}-\text{ض}} = 7 \quad \text{.........(2)}$$

$$\frac{12}{\text{س}} + \frac{12}{\text{ف}} = 5\frac{2}{3} \quad \text{.........(3)}$$

از (1) و (3) تفریق سے

$$\frac{1}{\text{ف}} - \frac{1}{\text{ف}+\text{ض}} = \frac{1}{18} \quad \text{.........(4)}$$

ایسے ہی (2) و (3) سے

$$\frac{1}{\text{ف}-\text{ض}} - \frac{1}{\text{ف}} = \frac{1}{9} \quad \text{.........(5)}$$

از (4) $18\text{ض} = \text{ف}(\text{ف}+\text{ض})$ ....(6)

و از (5) $9\text{ض} = \text{ف}(\text{ف}-\text{ض})$ ....(7)

از (6) و (7) تقسیم سے $2 = \frac{\text{ف}+\text{ض}}{\text{ف}-\text{ض}}$

و تب $\text{ف} = 3\text{ض}$

از (4) $\text{ض} = 1\frac{1}{2}$

و لہذا $\text{ف} = 4\frac{1}{2}$، $\text{س} = 4$

لہذا چلنے و تیرنے کی رفتار ہے 4 میل و $4\frac{1}{2}$ میل فی گھنٹہ حسب ترتیب،
و بہاؤ کی رفتار ہے $1\frac{1}{2}$ میل فی گھنٹہ۔

باب اٹھائیسواں: جز ضربئ دشوار

210. باب سترہویں میں ہم عبارات جبری کا ان کے اجزاء میں تجزیہ کرنے کے بعض اصول بیان کر چکے ہیں۔ اس باب میں اسی موضوع کو جاری کریں گے جس میں مزید دشوار مسائل کا تذکرہ کریں گے۔

211. بعض عبارات تھوڑی سی ترمیم کر کے دو مربعات کے فرق پہ لکھی جا سکتی ہیں، پھر مضمون 133 میں بیان کردہ قاعدہ سے ان کا تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: $س^4+س^2ف^2+ف^4$ کا تجزیہ کرو

$س^4+س^2ف^2+ف^4 = (س^4+2س^2ف^2+ف^4)-س^2ف^2$

$= (س^2+ف^2)^2-(سف)^2$

$= (س^2+ف^2+سف)(س^2+ف^2-سف)$

$= (س^2+سف+ف^2)(س^2-سف+ف^2)$

مثال دوم: $س^4-15س^2ف^2+9ف^4$ کا تجزیہ کرو

$س^4-15س^2ف^2+9ف^4 = (س^4-6س^2ف^2+9ف^4)-9س^2ف^2$

$= (س^2-3ف^2)^2-(3سف)^2$

$= (س^2-3ف^2+3سف)(س^2-3ف^2-3سف)$

212. وہ عبارات جو $س^3 \pm \frac{1}{ف^3}$ کی صورت میں وضع کی جا سکیں، متجزا ہو سکتی ہیں ان قواعد سے جن سے دو مکعبات کے اجتماع و فرق کا تجزیہ کیا جاتا ہے۔ [مضمون 136]

مثال اول: $\frac{8}{ع^3} - 27ب^6 = \left(\frac{2}{ع}\right)^3 - (3ب^2)^3$ کا تجزیہ کرو

$$= \left(\frac{2}{ع} - 3ب^2\right)\left(\frac{4}{ع^2} + \frac{6ب^2}{ع} + 9ب^4\right)$$

مثال دوم: $ع^2س^3 - \frac{8ع^2}{ف^3} - س^3 + \frac{8}{ف^3}$ کا تجزیہ کرو

$$ع^2س^3 - \frac{8ع^2}{ف^3} - س^3 + \frac{8}{ف^3} = س^3(ع^2-1) - \frac{8}{ف^3}(ع^2-1)$$

$$= (ع^2-1)\left(س^3 - \frac{8}{ف^3}\right)$$

$$= (ع+1)(ع-1)\left(س - \frac{2}{ف}\right)\left(س^2 + \frac{2س}{ف} + \frac{4}{ف^2}\right)$$

مثال سوم: $ع^9 - 64ع^3 - ع^6 + 64$ کا چھے اجزاء میں تجزیہ کرو

عبارت ہے $ع^3(ع^6-64)(ع^6-64)$

$$= (ع^6-64)(ع^3-1)$$

$$= (ع^3+8)(ع^3-8)(ع^3-1)$$

$$= (ع+2)(ع^2-2ع+4)(ع-2)(ع^2+2ع+4)(ع-1)(ع^2+ع+1)$$

مثال چہارم: ع(ع-1) س^2-(ع-بـ-1) سف-بـ(بـ+1)ف^2

= {عس-(بـ+1)ف}{(ع-1)س+بـف}

تنبیہ: اس جیسے مسائل میں دو حدی جز ضربی کے س و ف کے ضریبات کو عوما ایک دفع میں اندازہ کیا جا سکتا ہے، و خالص درمیانی حدود کے ضریبات کی تحقیق باقی رہتی ہے۔

213. مضمون 52 کی مثال دوم سے ہم نے پایا کہ ع^3+بـ^3+جـ^3-3عبـجـ کا ع+بـ+جـ سے حاصل تقسیم ہوا ع^2+بـ^2+جـ^2-بـجـ-جـع-عبـ ۔

لہذا ع^3+بـ^3+جـ^3-3عبـجـ = (ع+بـ+جـ)(ع^2+بـ^2+جـ^2-بـجـ-جـع-عبـ) ......(1)

یہ نتیجہ بہت اہم و خوب حفظ کر لینا چاہیے۔

ہم نے دیکھا کہ داہنے جانب کی عبارت شامل ہے تین مقادیر ع، بـ، جـ کے مکعب کے اجتماع کو جس میں سے حاصل ضرب عبـجـ کا 3 گنا مفرق ہے۔
جب بھی کوئی عبارت ایسی ترتیب پہ ہوگی، تو فارمولۂ مذکور سے اس کا تجزیہ کیا جا سکے گا۔

مثال اول: ع^3-بـ^3+جـ^3+3عبـجـ کا تجزیہ کرو

ع^3-بـ^3+جـ^3+3عبـجـ = ع^3+(-بـ)^3+جـ^3-3ع(-بـ)جـ

= (ع-بـ+جـ)(ع^2+بـ^2+جـ^2+بـجـ-جـع+عبـ)

-بـ کو فارمولہ (1) میں بـ کی جگہ وضع کر دیا۔

مثال دوم: س^3-8ف^3-27-18سف

= س^3+(-2ف)^3+(-3)^3-3س(-2ف)(-3)

= (س-2ف-3)(س^2+4ف^2+9-6ف+3س+2سف)

214. اجزاء ضربی کا افضل استعمال کر کے اکثر ضرب و تقسیم کے عمل سے کچھ گریز کیا جا سکتا ہے۔

اس بات پہ توجہ رکھنی چاہیے کہ جو فارمولات گزشتہ صفحات کی مثالوں میں گزرے وہ جتنے مفید صریح عمل میں ہیں اتنا ہی اس کے عکس میں ہیں۔ لہذا دو مربعات کے فرق کا تجزیہ کرنے کا فارمولہ اتنا مفید ہے کہ وہ ہمیں متمکن بناتا ہے دو مقادیر کے جمع و تفریق کے حاصل ضرب کو ایک دفع میں لکھنے پہ۔

مثال اول: 2ع+3بـ-جـ کو 2ع-3بـ+جـ سے تقسیم کرو

ان عبارات کو مرتب کیا تو 2ع+(3بـ-جـ) و 2ع-(3بـ-جـ)

تو حاصل ضرب ہوا = {2ع+(3بـ-جـ)}{2ع-(3بـ-جـ)}

= (2ع)^2-(3بـ-جـ)^2 [مضمون 133]

= 4ع^2-(9بـ^2-6بـجـ+جـ^2)

= 4ع^2-9بـ^2+6بـجـ-جـ^2

مثال دوم: ضرب کرو (ع^2+ع+1)س-ع-1 کو (ع-1)س-ع^2+ع-1

حاصل ہوا = {(ع^2+ع+1)س-(ع+1)} {(ع-1)س-(ع^2-ع+1)}

= (ع^3-1)س^2-{(ع^4+ع^2+1)+(ع^2-1)}س+(ع^3+1)

= (ع^3-1)س^2-(ع^4+2ع^2)س+ع^3+1

= (ع^3-1)س^2-ع^2(ع^2+2)س+ع^3+1

تنبیہ: ع^2+ع+1 و ع^2-ع+1 کا حاصل ضرب ہے ع^4+ع^2+1 و بنا حقیقت میں ضرب دیے لکھا جا سکتا ہے۔

مثال سوم: (3+س-2س^2)^2-(3-س+2س^2)^2 ....(1)

(3+س+2س^2)^2-(3-س-2س^2)^2 ....(2)

(1) میں (2) کو ضرب دو۔

عبارت (1) ہوئی

= (3+س-2س^2+3-س+2س^2)(3+س-2س^2-3+س-2س^2)

= 6(2س-4س^2)

= 12س(1-2س)

عبارت (2) ہوئی

= (3+س+2س^2+3-س-2س^2)(3+س+2س^2-3+س+2س^2)

= 6(2س+4س^2)

= 12س(1+2س)

لہذا حاصل ضرب ہوا 12س(1-2س)×12س(1+2س)

= 144س^2(1-4س^2)

مثال چہارم: 2س^2+س-6 و 6س^2-5س+1 کے حاصل ضرب کو 3س^2+5س-2 سے تقسیم کرو۔

تقسیم کو مکسور میں تعبیر کیا تو حاصل تقسیم مطلوب ہوا

$$\frac{(2س^2+س-6)(6س^2-5س+1)}{3س^2+5س-2}$$

$$= \frac{(2س-3)(س+2)(3س-1)(2س-1)}{(س+2)(3س-1)}$$

= (2س-3)(2س-1)

مثال پنجم: ثابت کرو کہ (2س+3ف-ض)^3+(3س+7ف+ض)^3 کو 5(س+2ف) سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

عبارت مذکور کی صورت ہوگی أ^3+ب^3، و لہذا اس کے مقسوم بہ کی شکل ہوگی أ+ب

لہذا (2س+3ف-ض)^3+(3س+7ف+ض)^3 کو

(2س+3ف-ض)+(3س+7ف+ض) سے تقسیم کیا جا سکتا ہے

یعنی 5س+10ف یا 5(س+2ف) سے

مثال ششم: جب ع^{3}+8-5بـ(25بـ^{2}-6ع) کو ع-5بـ+2 سے تقسیم کیا تو حاصل تقسیم کیا آیا۔

عبارت ہے   ع^{3}+8-125بـ^{3}+30عبـ

= ع^{3}+(-5بـ)^{3}+(2)^{3}-3×ع(-5بـ)(2)

= (ع-5بـ+2)(ع^{2}+25بـ^{2}+4+10بـ-2ع+5عبـ)   [مضمون 213]

تو حاصل تقسیم ہوا ع^{2}+25بـ^{2}+4+10بـ-2ع+5عبـ

مثال ہفتم: اگر س+ف = ع و س-ف = بـ تو ثابت کرو کہ

4(س^{4}-6س^{2}ف^{2}+ف^{4}) = 6ع^{2}بـ^{2}-ع^{4}-بـ^{4}

س^{4}-6س^{2}ف^{2}+ف^{4} = (س^{2}-2س^{2}ف^{2}+ف^{4})-4س^{2}ف^{2}

= (س^{2}-ف^{2})^{2} - $\frac{1}{4}$ (4سف)^{2}

= {(س+ف)(س-ف)}^{2}- $\frac{1}{4}$ {(س+ف)^{2}-(س+ف)^{2}}^{2}

= (عبـ)^{2}- $\frac{1}{4}$ (ع^{2}-بـ^{2})^{2}

∴ 4(س^{4}-6س^{2}ف^{2}+ف^{4}) = 4ع^{2}بـ^{2}-(ع^{2}-بـ^{2})^{2}

= 6ع^{2}بـ^{2}-ع^{4}-بـ^{4}

باب انتیسواں: متفرق مکتسبات و امثلہ

215. اس باب میں ہم متفرق امثلہ بیان کریں گے جو اکثر امور میں اصلا جدید نہیں ہیں لیکن انہیں حل کرنے کے لیے کچھ مہارت چاہیے ہے۔ یہ باب سابقہ ابواب کے تکرار کے لیے مفید ہے۔

مثال: عس^{4}-(عد-بـ)س^{3}+(عم-بـد-جـ)س^{2}+(بـم+جد)س-جم کو عس^{2}+بـس-جـ سے تقسیم کرو۔

س^{2}-دس+م

عس^{2}+بـس-جـ) عس^{4}-(عد-بـ)س^{3}+(عم-بـد-جـ)س^{2}+(بـم+جد)س-جم

عس^{4}+بـس^{3}-جـس^{2}

-عدس^{3}+(عم-بـد)س^{2}+(بـم+جد)س

-عدس^{3}-بـدس^{2} +جدس

عمس^{2} +بـمس -جم

عمس^{2} +بـمس -جم

تنبیہ: جب مقسوم یا مقسوم بہ میں ضریب مقدار مرکب ہوں تو افضل ہے کہ اسے عمل کے دوران چاندے میں رہنے دو۔

216. باب اٹھارویں میں بیان کردہ قواعد سے اعلی جز ضربی حاصل کرنے میں ہر بقیہ جو عمل کے دوران آتا ہے وہ اس جز ضربی کو ضمن میں لیے

ہوتا ہے جو مطلوب ہے۔ لہذا اگر کوئی ایک بقیہ بھی متجزا ہو سکے تو عمل کو کافی مختصر کیا جا سکتا ہے۔

مثال اول: 2س^3-(4ع-3ج)س^2+6(ب-عج)س+9بج

و 2س^3+(2ع+3ج)س^2+(3عج-4ب)س-6بج کا اعلی جز ضربی مشترک بتاؤ۔

1

2س^3-(4ع-3ج)س^2+6(ب-عج)س+9بج) 2س^3+(2ع+3ج)س^2+(3عج-4ب)س-6بج

2س^3-(4ع-3ج)س^2+(6ب-6عج)س+9بج

6عس^2+(9عج-10ب)س-15بج

اب بقیہ ہوا 6عس^2+9عجس-10بس-15بج

= 3عس(2س+3ج)-5ب(2س+3ج)

= (2س+3ج)(3عس-5ب)

ان اجزاء ضربی میں سے 3عس-5ب کو صراحتاً رد کیا جائے گا۔ لہذا اگر اس میں کوئی جز ضربی مشترک ہوگا تو 2س+3ج ہوگا۔ و تقسیم سے یا مضمون 152 میں بیان کردہ اصل سے ہم نے پایا کہ 2س+3ج ہر عبارت کا جز ضربی ہے۔ لہذا وہی اعلی جز ضربی ہوا۔

مثال دوم: (ع^2-2ع)س^2+2(2ع-1)س-ع^2+1

و $(ع^2-ع-2)س^2+(4ع+1)س-ع^2-ع$

ان عبارات میں سے ہر ایک کا تجزیہ ہو سکتا ہے جیسے کہ مضمون 212 کی مثال چہارم میں بیان کیا گیا ہے۔ لہذا

$(ع^2-2ع)س^2+2(2ع-1)س-ع^2+1 = ع(ع-2)س^2+2(2ع-1)س-(ع+1)(ع-1)$

$= \{(ع-2)س+(ع+1)\} \{عس-(ع-1)\}$

$(ع^2-ع-2)س^2+(4ع+1)س-ع^2-ع = (ع-2)(ع+1)س^2+(4ع+1)س-ع(ع+1)$

$= \{(ع-2)س+(ع+1)\} \{(ع+1)س-ع\}$

لہذا اعلی جز ضربی مشترک ہوا $(ع-2)س+ع+1$

217. ہم یہاں تضرب کے بعض مسائل متفرق کا اضافہ کر رہے ہیں۔ ایک عبارت کا چوتھا جذر اس کے دوسرے جذر کا دوسرا جذر نکال کے حاصل ہوتا ہے۔ ایسے ہی بار بار حصول جذر مربع کا قاعدہ جاری کر کے ہم آٹھواں و سولھواں وغیرہ جذر معلوم کر سکتے ہیں۔ و عبارت کا چھٹواں جذر اس کے دوسرے کا تیسرا یاتیسرے کا دوسرا جذر نکال کے حاصل ہوتا ہے۔ ایسے ہی جذر مربع و مکعب کو حاصل کرنے کے طرق کو ملا کے بعض دیگر اعلی جذور حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

مثال اول: $81س^4-216س^3ف+216س^2ف^2-96سف^3+16ف^4$ کا چوتھی جذر بتاؤ۔

جذر مربع اس کے قاعدہ سے حاصل کیا $9س^2-12سف+4ف^2$ و معاینہ سے معلوم ہوا کہ اس کا جذر مربع ہے $3س-2ف$ جو چوتھی جذر مطلوب ہے۔

مثال دوم: چھٹواں جذر بتاؤ $\left(\text{س}^3 - \frac{1}{\text{س}^3}\right)^2 - 6\left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)\left(\text{س}^3 - \frac{1}{\text{س}^3}\right) + 9\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^2$

با معاینہ اس کا جذر مربع ہوا $\left(\text{س}^3 - \frac{1}{\text{س}^3}\right) - 3\left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)$

جس ایسے بھی لکھا جا سکتا ہے $\text{س}^3 - 3\text{س} + \frac{3}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}^3}$

و اس کا جذر مکعب ہوا $\text{س} - \frac{1}{\text{س}}$ ، جو چھٹواں جذر مطلوب ہے۔

218. باب چھٹویں میں ہم نے غیر کامل تقسیم کی مثال دیا تھا۔ اسی طرح اگر عبارت کامل مربع یا مکعب نہ ہو تب بھی ہم تضرب کا عمل کر سکتے ہیں، و جذر کی اتنی حدود حاصل کر سکتے ہیں جتنی چاہیں۔

مثال: $1+2\text{س}-2\text{س}^2$ کی جذر مربع کی چار حدود کو معلوم کرنے کے لیے

$$1 + س - \frac{3}{2}س^2 + \frac{3}{2}س^3$$

$$1+2س-2س^2$$

$$1$$

$$2+س \;\Big)\; 2س-2س^2$$

$$2س+س^2$$

$$2+2س-\frac{3}{2}س^2 \;\Big)\; -3س^2$$

$$-3س^2-3س^3+\frac{9}{4}س^4$$

$$2+2س-3س^2+\frac{3}{2}س^3 \;\Big)\; 3س^3+\frac{9}{4}س^4$$

$$3س^3+3س^4-\frac{9}{2}س^5+\frac{9}{4}س^6$$

$$-\frac{21}{4}س^4+\frac{9}{2}س^5-\frac{9}{4}س^6$$

لہذا نتیجہ مطلوب ہوا $1 + س - \frac{3}{2}س^2 + \frac{3}{2}س^3$

219. مضمون 124 میں ہم نے جذور مربع و مکعب نکالنے کے اساسی و جبری طریقوں میں تشبیہ کے جانب اشارہ کیا تھا۔ اب ہم بتا رہے ہیں کہ کسی عدد کے جذر مربع یا مکعب نکالنے میں، جب عام قاعدہ سے کچھ عدد نقوش حاصل ہو جائیں، تو عام تقسیم سے وہ عدد قریباً دو گنا ہو جائے گا۔

220. اگر کسی عدد کا جذر مربع $2ط+1$ نقوش کو متضمن ہو، تو جب عام قاعدہ سے ان میں سے پہلا $ط+1$ حاصل ہو جائے، تو باقی $ط$ تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ن سے وہ عدد مذکور مراد ہے، ع وہ جز ہے جو حاصل کیا جا چکا ہے یعنی پہلا ط+1 نقوش جو عام قاعدہ سے حاصل ہوا ہے ط کے لحوق کے ساتھ، و س جذر کا باقی جز ہے۔

تو $\sqrt{\text{ن}} = \text{ع}+\text{س}$

$\therefore\ \text{ن} = \text{ع}^2+2\text{ع}\text{س}+\text{س}^2$

$\therefore\ \dfrac{\text{ن}-\text{ع}^2}{\text{س}} = \text{س}+\dfrac{\text{س}^2}{2\text{ع}}$ ....(1)

اب جذر کے ط+1 نقوش، جو ع سے تعبیر ہے، کے حاصل ہونے کے بعد بقیہ $\text{ن}-\text{ع}^2$ ہے، و 2ع عمل کے اسی قدم میں مقسوم بہ ہے۔ ہم نے (1) سے جانا کہ $\text{ن}-\text{ع}^2$ کو 2ع سے تقسیم کرنے پہ س حاصل ہوا جس میں $\dfrac{\text{س}^2}{2\text{ع}}$ کو جمع کیا گیا۔

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ $\dfrac{\text{س}^2}{2\text{ع}}$ ایک مکسور کامل ہے، تو تقسیم سے آنے والے بقیہ کو نظر انداز کر کے ہم نے باقی جذر س حاصل کیا۔

چونکہ س میں ط نقوش شامل ہیں، لہذا س^2 میں زیادہ سے زیادہ 2ط نقوش شامل ہوں گے؛ و ع 2ط+1 نقوش کا عدد ہے، لہذا 2ع میں کم سے کم 2ط+1 نقوش شامل ہوں گے و لہذا $\dfrac{\text{س}^2}{2\text{ع}}$ مکسور کامل ہوا۔

تحقیق مذکور سے، b=1 کر کے ہم نے پایا کہ جذر مربع کے نقوش میں سے کم سے کم دو ضرور حاصل ہونے چاہیے تبھی تقسیم کا طریقہ جو جذر مربع کے اگلے نقوش کے حصول میں استعمال کیا جائے گا وہ درست نتیجہ دے گا۔

مثال: 290 کا اعشاریہ کے پانچ مقام تک جذر مربع بتاؤ۔

```
      290 ( 17.02
      1
27   | 190
     | 189
3402 | 10000
     |  6804
        3196
```

یہاں ہم نے جذر مربع کے چار نقوش عام قاعدہ سے حاصل کیا۔ و مزید تین خالص تقسیم سے حاصل ہوں گے، 2×1702 یعنی 3403 کو مقسوم بہ کے طور پہ و 3196 کو بقیہ کے طور پہ استعمال کر کے۔ لہذا

```
3404 ) 31960 ( 938
       30636
        13240
        10212
         30280
         27232
          3048
```

و اعشاریہ کے پانچ مقام تک $\sqrt{290} = 17.02938$

جب مقسوم بہ متعدد ارقام کو متضمن تو تقسیمِ مختصر کا مفاد کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا۔

و اس بات کا خیال رکھنا چاہیے جذر کا دوسرا نقش حاصل کرنے میں 190 کو 20 سے تقسیم کرنے پہ 9 حاصل ہوا تھا اگلے نقش کے لیے، و نقش 7 عارضی طور پہ حاصل ہوا۔ یہ قاعدہ جبری کی ایک ترمیم ہے جس کا ذکر مضمون 124 میں ہے۔

221. اگر کسی عدد کا مکعب متضمن ہو 2ط+2 نقوش کو، تو جب عام قاعدہ سے پہلا ط+2 حاصل ہوگا تو باقی ط تقسیم سے حاصل ہوگا۔

فرض کرو کہ ن سے وہ عدد مذکور مراد ہے؛ ع جذر مکعب کا وہ جز ہے جو حاصل کیا جا چکا ہے یعنی پہلا ط+2 نقوش جو عام قاعدہ سے حاصل ہوا ہے، ط کے لحوق کے ساتھ؛ س جذر کا باقی جز ہے۔

تو $\sqrt[3]{\text{ن}} = \text{ع}+\text{س}$

$$\therefore \quad \text{ن} = \text{ع}^3+3\text{ع}^2\text{س}+3\text{ع}\text{س}^2+\text{س}^3$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ن}-\text{ع}^3}{3\text{ع}^2} = \text{س} + \frac{\text{س}^2}{\text{ع}} + \frac{\text{س}^3}{3\text{ع}^2} \quad \text{.........(1)}$$

اب جذر کے ط+2 نقوش کے حصول کے بعد جسے ع سے تعبیر کیا ہے، ن-ع^3 بقیہ ہے؛ و 3ع^2 عمل کے اسی قدم میں مقسوم بہ ہے۔ ہم نے (1) سے دیکھا کہ ن-ع^3 کو 3ع^2 سے تقسیم کیا تو س حاصل ہوا جو کہ زیادہ ہے $\frac{س^2}{ع} + \frac{س^3}{3ع^2}$

اب ثابت کریں گے کہ یہ عبارت مکسور کامل ہے، تاکہ تقسیم سے آنے والے بقیہ کو نظر انداز کر کے ہم پا سکیں س جو کہ باقی جذر ہے۔

مفروض کے مطابق س<$10^{ط}$ و ع>$10^{2ط+1}$

$$\therefore \frac{س^2}{ع} < \frac{10^{2ط}}{10^{2ط+1}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{س^2}{ع} < \frac{1}{10}$$

$$\text{و} \quad \frac{س^3}{3ع^2} < \frac{10^{3ط}}{3\times10^{4ط+2}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{س^3}{3ع^2} < \frac{1}{3\times10^{ط+1}}$$

$$\text{لہذا} \quad \frac{س^2}{ع} + \frac{س^3}{3ع^2} < \frac{1}{10} + \frac{1}{3\times10^{ط+1}}$$

222. **تعریف:** عینی وہ قضیۂ جبری ہے جو اس میں موجود حروف کی کسی بھی قیمت پہ صادق ہوتا ہے۔

مثال: ع^3+بـ^3 = (ع+بـ)(ع^2-عبـ+بـ^2)

س^3+ف^3+ض^3-3سفض = (س+ف+ض)(س^2+ف^2+ض^2-فض-ضس-سف)

223. عینی اس بات پہ دلالت کرتی ہے کہ دو عبارات ہمیشہ متساوی ہوں گی۔ و اس تساوی کا ثبوت **ثبوتِ عینی** کہلاتا ہے۔ عمل کا طریقہ یہ ہے کہ عبارات مذکور میں سے ایک اختبار کرو و متوالہ انتقالات سے دکھاو کہ وہ دوسری کی شکل پہ لائی جا سکتی ہے۔

مثال اول: ثابت کرو کہ بـجـ(بـ-جـ)+جـع(جـ-ع)+عبـ(ع-بـ) =(بـ-جـ)(جـ-ع)(ع-بـ)

پہلا جانب = بـجـ(بـ-جـ)+جـ^{2}ع-جـع^2+ع^{2}بـ-عبـ^2

= بـجـ(بـ-جـ)+ع^2(بـ-جـ)-ع(بـ^2-جـ^2)

= (بـ-جـ){بـجـ+ع^2-ع(بـ+جـ)}

= (بـ-جـ){بـجـ+ع^2-عبـ-عجـ}

= (بـ-جـ){ع(ع-بـ)-جـ(ع-بـ)}

= (بـ-جـ)(ع-بـ)(ع-جـ)

= -(بـ-جـ)(جـ-ع)(ع-بـ)

ع-جـ کی علامت تبدیل کر دیا ترتیب دوری کو برقرار رکھنے کے لیے

[مضمون 172]

داہنے جانب کی عبارت درج ذیل صورت میں بآسنی تعبیر کی جا سکتی ہے۔

ع^2(بـ-جـ)+بـ^2(جـ-ع)+جـ^2(ع-بـ)

-{ع(بـ^2-جـ^2)+بـ(جـ^2-ع^2)+جـ(ع^2-بـ^2)}

لہذا ہم کو درج ذیل نتائج حاصل ہوئے

بـجِ(بـ-جِ)+جِع(جِ-ع)+عبـ(ع-بـ) = -(بـ-جِ)(جِ-ع)(ع-بـ)

ع^2(بـ-جِ)+بـ^2(جِ-ع)+جِ^{2}(ع-بـ) = -(بـ-جِ)(جِ-ع)(ع-بـ)

ع(بـ^2-جِ^{2})+بـ(جِ^{2}-ع^2)+جِ(ع^2+بـ^2) = -(بـ-جِ)(جِ-ع)(ع-بـ)

یہ عینیات متکرر سامنے آتے ہیں، لہذا انہیں بغور سمجھ کرحفظ کر لینا چاہیے۔

مثال دوم: اگر 2ص = ع+بـ+جِ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ص-ع}}+\frac{1}{\text{ص-بـ}}+\frac{1}{\text{ص-جِ}}-\frac{1}{\text{ص}}=\frac{\text{عبـجِ}}{\text{ص(ص-ع)(ص-بـ)(ص-جِ)}}$$

پہلا جانب $\left(\frac{1}{\text{ص-ع}}+\frac{1}{\text{ص-بـ}}\right)+\left(\frac{1}{\text{ص-جِ}}-\frac{1}{\text{ص}}\right)$

$$=\frac{\text{ص-بـ+ص-ع}}{\text{(ص-ع)(ص-بـ)}}+\frac{\text{ص-ص+جِ}}{\text{ص(ص-جِ)}}$$

$$=\frac{\text{2ص-ع-بـ}}{\text{(ص-ع)(ص-بـ)}}+\frac{\text{جِ}}{\text{ص(ص-جِ)}}$$

$$=\frac{\text{جِ}}{\text{(ص-ع)(ص-بـ)}}+\frac{\text{جِ}}{\text{ص(ص-جِ)}}$$

$$=\text{جِ}\left\{\frac{\text{ص(ص-جِ)+(ص-ع)(ص-بـ)}}{\text{ص(ص-ع)(ص-بـ)(ص-جِ)}}\right\}$$

$$=\frac{\text{جِ}\{\text{ص}^2\text{-جِص+ص}^2\text{-عص-بـص+عبـ}\}}{\text{ص(ص-ع)(ص-بـ)(ص-جِ)}}$$

$$=\frac{\text{جِ}\{\text{2ص}^2\text{-ص(ع+بـ+جِ)+عبـ}\}}{\text{ص(ص-ع)(ص-بـ)(ص-جِ)}}$$

$$=\frac{\text{عبـجِ}}{\text{ص(ص-ع)(ص-بـ)(ص-جِ)}}$$

کیونکہ ص(ء+بـ+جـ) = ص×2ص = 2ص^2

تنبیہ: یہاں 2ص ء+بـ+جـ کی مختصر تعبیر ہے۔ و تخفیف کو مزید آسان کیا جا سکتا ہے عمل میں ص کو اس کے تعبیر سے بدلے بنا استعمال کر کے۔ اس جیسے مسائل میں طالب کو جب تک ممکن ہو مختصر تعبیر میں ہی عمل کرنا چاہیے، اس کے مطول سے بدلے بنا۔

مثال سوم: اگر س^2+یـ^2 = 2(سف+فض+ضیـ-ف^2-ض^2)

ثابت کرو کہ س=ف=ض=یـ

منتقل کر کے ہم نے پایا س^2-2سف+ف^2+ف^2-2فض+ض^2+ض^2-2ضیـ+یـ^2 = 0

یا (س-ف)^2+(ف-ض)^2+(ض-بـ)^2 = 0

اب چونکہ کسی بھی مقدار کا مربع ہمیشہ ایجابی ہوتا ہے، تو (س-ف)^2، (ف-ض)^2، (ض-یـ)^2 میں سے ہر ایک ایجابی ہوگا ہے۔ لہذا ان کا اجتماع 0 نہیں ہو سکتا جب تک کہ ان میں سے ہر ایک 0 نہ ہو۔

$\therefore$ س-ف = 0، ف-ض = 0، ض-یـ = 0

$\therefore$ س=ف=ض=یـ

تنبیہ: طالب کو دونوں عبارات سے حاصل کردہ نتائج میں فرق کو پر توجہ سمجھنا چاہیے۔

(س-ع)^2+(فـ-بـ)^2 = 0 ....(1)

و (س-ع)(فـ-بـ) = 0 ....(2)

از (1) ہم کہ سکتے ہیں کہ دونوں س-ع = 0 و فـ-بـ = 0 ہیں۔

جب کہ (2) سے ہم کہیں گے کہ یا تو س-ع = 0 یا فـ-بـ = 0 ہے۔

224. اب ہم عبارت کو ترتیب دوری پہ مرتب کرنے سے ہونے والے مفاد کو نمایاں کرنے کے لیے مکسورات کی مزید امثلہ بیان کریں گے۔ [مضمون 172]

مثال:
$$\frac{\text{ع}}{\text{(ع-بـ)(ع-جـ)(س-ع)}} + \frac{\text{بـ}}{\text{(بـ-جـ)(بـ-ع)(س-بـ)}} + \frac{\text{جـ}}{\text{(جـ-ع)(جـ-بـ)(س-جـ)}}$$

ہر ما تحت میں ایک جز ضربی کی علامت تبدیل کیا تاکہ ترتیب دوری محفوظ رہے، و ہم کو ادنی ما تحت مشترک حاصل ہوا۔

(ع-بـ)(بـ-جـ)(جـ-ع)(س-ع)(س-بـ)(س-جـ)

کل عبارت کا ما فوق ہوا

-[ع(بـ-جـ)(س-بـ)(س-جـ)+......+......]

یا -[ع(بـ-جـ){س^2-(بـ+جـ)س+بـجـ}+......+......]

اس کو س کی قدر کے مطابق ترتیب دیا لہذا

س^2 کا ضریب = -{ع(بـ-جـ)+بـ(جـ-ع)+جـ(ع-بـ)}

= 0

سؔ کا ضریب = {عؔ(بؔ²-جؔ²)+بؔ(جؔ²-عؔ²)+جؔ(عؔ²-بؔ²)}

= (بؔ-جؔ)(جؔ-عؔ)(عؔ-بؔ) [مضمون 223]

وہ حدود جن میں سؔ نہیں ہے

= -{عؔبؔجؔ(بؔ-جؔ)+عؔبؔجؔ(جؔ-عؔ)+عؔبؔجؔ(عؔ-بؔ)}

= عؔبؔجؔ{بؔ-جؔ+جؔ-عؔ+عؔ-بؔ}

= 0

لہذا عبارت = (بؔ-جؔ)(جؔ-عؔ)(عؔ-بؔ)سؔ / (بؔ-جؔ)(جؔ-عؔ)(عؔ-بؔ)(سؔ-عؔ)(سؔ-بؔ)(سؔ-جؔ)

= سؔ / (سؔ-عؔ)(سؔ-بؔ)(سؔ-جؔ)

تنبیہ: ایسے مسائل میں عمل مزید سہولت سے ہو سکتا ہے اگر طالب درج ذیل متساویات کو بآسانی لکھنے کی عادت بنا لے۔

(بؔ-جؔ)+(جؔ-عؔ)+(عؔ-بؔ) = 0

عؔ(بؔ-جؔ)+بؔ(جؔ-عؔ)+جؔ(عؔ-بؔ) = 0

عؔ²(بؔ-جؔ)+بؔ²(جؔ-عؔ)+جؔ²(عؔ-بؔ) = -(عؔ-بؔ)(بؔ-جؔ)(جؔ-عؔ)

بؔجؔ(بؔ-جؔ)+جؔعؔ(جؔ-عؔ)+عؔبؔ(عؔ-بؔ) = -(عؔ-بؔ)(بؔ-جؔ)(جؔ-عؔ)

عؔ(بؔ²-جؔ²)+بؔ(جؔ²-عؔ²)+جؔ(عؔ²-بؔ²) = (عؔ-بؔ)(بؔ-جؔ)(جؔ-عؔ)

225. قیمت بتاو جب کہ (1) (2) سے تقسیم ہو سکے۔

$س^3+ضس^2+کس+د$ ....(1)

$س^2+عس+ب$ ....(2)

(1) کو (2) سے تقسیم کیا تو

$$\begin{array}{r} س+(ض-ع) \\ س^2+عس+ب \;\big)\; س^3+ضس^2+کس+د \\ س^3+عس^2+بس \\ \hline (ض-ع)س^2+(ک-ب)س+د \\ (ض-ع)س^2+ع(ض-ع)س+ب(ض-ع) \\ \hline \{(ک-د)-ع(ض-ع)\}س+د-ب(ض-ع) ......(3) \end{array}$$

اب اگر بقیہ 0 ہو تو تقسیم مکمل ہوگی۔ ایسا تبھی ہوگا جب

$\{(ک-ب)-ع(ض-ع)\}س+د-ب(ض-ع) = 0$ یا

$$س = \frac{ب(ض-ع)-د}{ک-ب-ع(ض-ع)}$$

تو جب س کی یہ قیمت ہوگی تو (1) (2) سے تقسیم ہو سکے گا۔

لیکن اگر (3) میں $ک-ب-ع(ض-ع) = 0$

$د-ب(ض-ع) = 0$

س کی قیمت چاہے جو ہو بقیہ صفر ہی ہوگا۔ لہذا $س^3+ضس^2+کس+ب$ تقسیم ہو سکتا ہے $س^2+عس+ب$ سے س کی ہر قیمت کے لیے جب کہ

$ک-ب-ع(ض-ع) = 0$

و د-بـ(ضـ-ء) = 0.

226. $س^2$+فس+ک کے مربع کامل ہونے کی شرط جاننے کے لیے۔ ظاہر ہے کہ ایسی کوئی عبارت مطلق مربع کامل نہیں بن سکتی جب تک کہ ضریبات ف و ک کے درمیان کوئی مخصوص تعلق نہ ہو۔ ف و ک کے درمیان کی شرط ضروری کو معلوم کرنا ہی اس مسئلہ کی غایت ہے۔

جذر مربع کا عام قاعدہ استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوا

$$س^2+فس+ک \Big) س + \frac{ف}{2}$$

$$س^2$$

$$2س + \frac{ف}{2} \Big) فس+ک$$

$$فس + \frac{ف^2}{4}$$

$$ک - \frac{ف^2}{4}$$

تو اگر $س^2$+فس+ک ایک مربع کامل ہے تو بقیہ $ک - \frac{ف^2}{4}$ لامحالہ صفر ہوگا۔

تو $ک - \frac{ف^2}{4} = 0$ یا $ف^2 = 4ک$ وہ شرط ہے جو مطلوب ہے۔

227. $س^4$+ف$س^3$+ک$س^2$+دس+ص مربع کامل ہے اگر $\left(ک - \frac{ف^2}{4}\right)^2$ = 4ص و $د^2$=$ف^2$ص، ثابت کرنے کے لیے۔

جذر مربع لامحالہ ایک تین عبارت ہوگا جس کی صورت ہوگی $س^2+اس+م$؛

و اگر ہم وضع کریں $س^4+فس^3+کس^2+دس+ص = (س^2+اس+م)^2$

پھر ہم کو بایاں جانب کھولنے پہ حاصل ہوا

$$س^4+فس^3+کس^2+دس+ص = س^4+2اس^3+س^2(ا^2+2م)+2امس+م^2$$

چونکہ یہ س کی ہر قیمت کے لیے صادق ہے، لہذا ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ س کی اقدارِ متشابہ کے ضریبات متشابہ ہوں گے۔ لہذا

$2ا=ف \quad ا^2+2م=ک$

$2ام=د \quad م^2=ص$

ان مساوات میں سے مقدار مجہول ا و م ختم کر کے ہم ف، ک، د، ص کے درمیان کا تعلقِ ضروری معلوم کر سکتے ہیں۔

لہذا ہمیں حاصل ہوا $ک - \frac{ف^2}{4} = 2م = 2\sqrt{ص}$

$$د = 2ام = ف\sqrt{ص}$$

$$\therefore \left(ک - \frac{ف^2}{4}\right)^2 = 4ص \text{ و } د^2 = ف^2ص$$

تنبیہ: یہاں مضمون 226 کا طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ و موجودہ مضمون کا طریقہ مضمون 225 و 226 کے نتائج معلوم کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

228. مضمون گزشتہ ایک طریقہ کو نمایاں کرنے کے لیے تھا جس کا مجری بہت وسیع ہے۔ ثبوت کے دوران ہم نےایک اہم اصل کے صادق ہونے کو فرض کیا ہے۔ جو ہے۔

اگر دو عبارات جن میں س مشترک ہے وہ عینی متساوی ہیں تو دونوں عبارات میں متشابہ اقدار کے ضریبات بھی متساوی ہوں گے۔
اس اصل کی وضاحت اس فن کے اعلی درجہ میں کی جاتی ہے، و یہاں پہ مکمل نہیں ہو سکتی۔

229. اب ہم مضمون 55 میں ذکر کردہ مقدمہ کی دلیل بیان کریں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ ط ایک ایجابی و صحیح عدد ہے۔

1. ثابت کرنے کے لیے کہ $س^{ط}-ف^{ط}$ س-ف سے ہمیشہ تقسیم ہو سکتا ہے۔

$س^{ط}-ف^{ط}$ کو س-ف سے تقسیم کرو یہاں تک کہ ایسا بقیہ حاصل ہو جس میں س نہ ہو۔

فرض کرو کہ ح حاصل تقسیم ہے و ب بقیہ ہے؛ تو

$س^{ط}-ف^{ط} = ح(س-ف)+ب$

چونکہ ب س کو متضمن نہیں ہے، تو س کی قیمت چاہے جو ہو ب متغیر نہ ہوگا۔

س=ف وضع کیا تو $ف^{ط}-ف^{ط} = ح×0+ب$

∴ ب=0 تو چونکہ بقیہ کچھ نہیں ہے لہذا $س^{ط}-ف^{ط}$ کو $س-ف$ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

2. ثابت کرنے کے لیے کہ $س^{ط}+ف^{ط}$ کو $س+ف$ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے جب کہ ط تاق ہو، لیکن تب نہیں کیا جا سکتا جب وہ جفت ہو۔

پہلے کے مثل $س^{ط}+ف^{ط} = ح(س+ف)+ب$

چونکہ ب س کو متضمن نہیں ہے، تو س کی قیمت چاہے جو ہو ب متغیر نہ ہوگا۔

$س = -ف$ وضع کیا تو $(-ف)^{ط}+ف^{ط} = ح\times0+ب$

یعنی $ب = (-ف)^{ط}+ف^{ط}$

1. اگر ط تاق ہے تو $(-ف)^{ط}+ف^{ط} = -ف^{ط}+ف^{ط} = 0$
2. اگر ط جفت ہے تو $(-ف)^{ط}+ف^{ط} = ف^{ط}+ف^{ط} = 2ف^{ط}$

تو جب ط جفت ہے تو بقیہ پایا گیا، و جب تاق ہے تو نہیں پایا گیا جو ثابت کرتا ہے کہ مقدمہ مذکور صادق ہے۔

ایسے ہی یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ جب ط جفت ہو تو $س^{ط}-ف^{ط}$ $س+ف$ سے تقسیم ہو جائے گا، و $س^{ط}+ف^{ط}$ $س-ف$ سے کبھی بھی تقسیم نہیں ہوگا۔

تقسیم کے بعض اقدام سے گزرنے کے بعد کسی بھی مسئلہ میں حاصل تقسیم کی صورت کو بآسانی جانا چا سکتا ہے۔ و موجودہ

مضمون کے نتائج کو باسہولت درج ذیل صورت پہ تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

1. ط کی تمام قیمت کے لیے

$$\text{س}^{\text{ط}}-\text{ف}^{\text{ط}} = (\text{س}-\text{ف})(\text{س}^{\text{ط}-1}+\text{س}^{\text{ط}-2}\text{ف}+\text{س}^{\text{ط}-3}\text{ف}^{2}+......+\text{ف}^{\text{ط}-1})$$

2. جب ط تاق ہو

$$\text{س}^{\text{ط}}+\text{ف}^{\text{ط}} = (\text{س}+\text{ف})(\text{س}^{\text{ط}-1}-\text{س}^{\text{ط}-2}\text{ف}+\text{س}^{\text{ط}-3}\text{ف}^{2}-......+\text{ف}^{\text{ط}-1})$$

3. جب ط جفت ہو

$$\text{س}^{\text{ط}}-\text{ف}^{\text{ط}} = (\text{س}+\text{ف})(\text{س}^{\text{ط}-1}-\text{س}^{\text{ط}-2}\text{ف}+\text{س}^{\text{ط}-3}\text{ف}^{2}-......+\text{ف}^{\text{ط}-1})$$

230. اگر کوئی عبارت جبری

$\text{س}^{\text{ط}}+\text{ف}_{1}\text{س}^{\text{ط}-1}+\text{ف}_{2}\text{س}^{\text{ط}-2}+\text{ف}_{3}\text{س}^{\text{ط}-3}+......+\text{ف}_{\text{ط}-1}\text{س}+\text{ف}_{\text{ط}}$ کو $\text{س}-\text{ع}$ سے تقسیم کیا جائے تو بقیہ ہوگا۔

$$\text{ع}^{\text{ط}}+\text{ف}_{1}\text{ع}^{\text{ط}-1}+\text{ف}_{2}\text{ع}^{\text{ط}-2}+\text{ف}_{3}\text{ع}^{\text{ط}-3}+......+\text{ف}_{\text{ط}-1}\text{ع}+\text{ف}_{\text{ط}}$$

عبارت مذکور کو $\text{س}-\text{ع}$ سے تقسیم کیا جب تک کہ ایسا بقیہ حاصل نہیں ہوا جس میں س نہ ہو۔ فرض کرو ح حاصل تقسیم و ب بقیہ ہے۔ تو

$$\text{س}^{\text{ط}}+\text{ف}_{1}\text{س}^{\text{ط}-1}+\text{ف}_{2}\text{س}^{\text{ط}-2}+......+\text{ف}_{\text{ط}-1}\text{س}+\text{ف}_{\text{ط}} = \text{ح}(\text{س}-\text{ع})+\text{ب}$$

چونکہ ب میں س نہیں ہے تو ہم س کو چاہے جو قیمت دیں اس سے ب متغیر نہ ہوگا۔

وضع کرو $\text{س}=\text{ع}$ تو

$$\text{ع}^{\text{ط}}+\text{ف}_{1}\text{ع}^{\text{ط}-1}+\text{ف}_{2}\text{ع}^{\text{ط}-2}+......+\text{ف}_{\text{ط}-1}\text{ع}+\text{ف}_{\text{ط}} = \text{ح}\times 0+\text{ب}$$

∴ ب = ع^{ط}+ف$_{1}$ع$^{ط-1}$+ف$_{2}$ع$^{ط-2}$+......+ف$_{ط-1}$ع+ف$_{ط}$

و یہ مقدمۂ مذکور کو ثابت کرتا ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ جب بھی کوئی عبارت جبری س-ع سے تقسیم ہو، تو عبارت مذکور میں س کو ع سے بدل کے ایک ہی دفع میں بقیہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

و اگر کوئی عبارت جبری جس میں س متضمن ہو و وہ 0 ہو جائے جب س کی جگہ ع وضع کیا ، تو اس میں س-ع جز ضربی کے طور پہ متضمن ہوگا۔

مثال اول: جب س^{4}-2س^{3}+س-7 کو س+2 سے تقسیم کیا تو بقیہ ہوا

$(-2)^{4}-2(-2)^{3}+(-2)-7$

یعنی 16+16-2-7، یا 23

و بقیہ کو مزید اختصار سے حل کیا جا سکتا ہے

[{(س-2)س}س+1]س-7 میں س=-2 کر کے

مثال دوم: س^{3}+3س^{2}-13س-15

آزمانے سے معلوم ہوا کہ جب س=3 تو یہ عبارت ختم ہو جائے گی۔ لہذا س-3 ایک جز ضربی ہے۔

$$\therefore \text{س}^3+3\text{س}^2-13\text{س}-15 = \text{س}^2(\text{س}-3)+6\text{س}(\text{س}-3)+5(\text{س}-3)$$

$$= (\text{س}-3)(\text{س}^2+6\text{س}+5)$$

$$= (\text{س}-3)(\text{س}+1)(\text{س}+5)$$

تنبیہ: اکلوتی قیم عددی جن کو س سے تبدیل کرنے کی ضرورت ہوتی ہے وہ عبارت کی آخری حد کے اجزاء ضربی ہیں۔ لہذا موجودہ مسئلہ میں ‎-5 کو آزما کے ہم جز ضربی س-5 کو حاصل کر سکتے تھے۔

باب تیسواں: علم اقدارِ جذر

231. یہاں اقدار سے متعلق تمام تعریفات و قواعد اس افتراض پہ مبنی ہے کہ وہ اقدار اعدادِ صحیحِ ایجابی ہیں۔ مثلاً

1. $ع^{14} = ع \times ع \times ع$...... تا 14 اجزاء ضربی۔
2. $ع^{14} \times ع^{3} = ع^{14+3} = ع^{17}$
3. $ع^{14} \div ع^{3} = ع^{14-3} = ع^{11}$
4. $(ع^{14})^{3} = ع^{14 \times 3} = ع^{42}$

موجودہ باب کی دو غایات ہیں: پہلی، تمام اقدار کے صحیح ایجابی ہونے کی حالت میں ان کی ترکیب کے قوانین وضع کرنے کے لیے عام دلائل بیان کرنا؛ دوسری، جن نقوش کی اقدارِ مسکور صفر یا سلبی ہیں، ان کو ان قوانین کے مطابق معقول معانی دینے کا بیان کرنا۔
ہم اولاً اقدار صحیح ایجابی کی تعریف سے براہ راست تین اہم مقدمات ثابت کرتے ہیں۔

232. **تعریف:** جب م ایک عدد صحیح ایجابی ہو تو $ع^{م}$ سے مراد ہوگا م اجزاء ضربی کا حاصل ضرب، جن میں سے ہر ایک جز ع کے متساوی ہے۔

233. **مقدمہ اول:** $ع^{م} \times ع^{ن} = ع^{م+ن}$ کا ثبوت، جب کہ م و ن صحیح ایجابی ہوں۔

تعریف کے مطابق، $ع^{م} = ع\times ع\times ع$...... تا م اجزاء ضربی

$ع^{ن} = ع\times ع\times ع$...... تا ن اجزاء ضربی

$\therefore$ $ع^{م}\times ع^{ن} =$ ($ع\times ع\times ع$...... تا م اجزاء)$\times$($ع\times ع\times ع$...... تا ن اجزاء ضربی)

$= ع\times ع\times ع$...... تا م+ن اجزاء ضربی

$= ع^{م+ن}$، تعریف سے حاصل ہوا۔

زیادت: اگر د بھی ایک صحیح ایجابی ہو تو

$ع^{م}\times ع^{ن}\times ع^{د} = ع^{م+ن+د}$

وایسے ہی اجزاء ضربی کی کسی بھی تعداد کے لیے ہوگا۔

234. **مقدمہ دوم:** $ع^{م}\div ع^{ن} = ع^{م-ن}$ کا ثبوت، جب کہ م و ن صحیح ایجابی ہوں

و م>ن۔

$$ع^{م}\div ع^{ن} = \frac{ع^{م}}{ع^{ن}} = \frac{ع\times ع\times ع\text{......تا م اجزاء ضربی}}{ع\times ع\times ع\text{......تا ن اجزاء ضربی}}$$

$= ع\times ع\times ع$...... تا م-ن اجزاء ضربی

$= ع^{م-ن}$

235. **مقدمہ سوم:** $(ع^{م})^{ن} = ع^{من}$ کا ثبوت جب کہ م و ن صحیح ایجابی ہوں۔

$(ع^{م})^{ن} = ع^{م}\times ع^{م}\times ع^{م}$...... تا ن اجزاء ضربی

= (ع×ع×ع...... تا م اجزاء)(ع×ع×ع...... تا م اجزاء)......

چاندے نـ مرتبہ دوہرائں گے

= ع×ع×ع...... تا منـ اجزاء ضربی

$= ع^{من}$

236. یہ تھے اقدار کو مرکب کرنے کے اساسی قواعد جو براہ راست اس کی تعریف سے ثابت ہیں جو خالص تبھی معقول ہے جب اقدار کو ایجابی و صحیح تسلیم کیا جائے۔

لیکن اقدار کسری و سلبی کا استعمال بھی مناسب پایا جاتا ہے جیسے $ع^{\frac{4}{5}}$ $ع^{-7}$؛ یا بالعموم $ع^{\frac{د}{م}}$، $ع^{-ن}$؛ لیکن ابھی ان کے کوئی معقول معنی نہیں ہیں، کیونکہ ظاہر ہے کہ $ع^{م}$ کی تعریف مضمون 232 میں، جس پہ ثابت گردہ تین مقدمات مبنی ہیں، وہ تب جاری نہ ہوگی جب م کسری یا سلبی ہو۔
اب ضروری ہے کہ تمام اقدار، خواہ ایجابی ہوں یا سلبی، صحیحی ہوں یا کسری، ایک ہی قانون کے تابع ہوں۔ لہذا اب ہم درج ذیل طریقہ سے نقوش جیسے $ع^{\frac{د}{م}}$، $ع^{-ن}$ کے معانی حاصل کریں گے۔ تو ہم فرض کرتے ہیں کہ وہ قوانین اساسی، $ع^{م}×ع^{ن} = ع^{م+ن}$، کے تابع ہیں و تسلیم کرتے ہیں اس معنی کو جو اس افتراض سے لازم آتا ہے۔ تو معلوم ہوتا ہے کہ نقوش جن کو معنی دیا گیا ہے وہ مقدماتِ دوم و سوم میں ذکر کردہ دیگر قوانین کے بھی مطابق ہیں۔

237. $\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}$ کا معنی تلاش کرنا، جب کہ د و ص صحیح ایجابی ہوں۔

چونکہ $\text{ع}^{\text{م}}\times\text{ع}^{\text{ن}} = \text{ع}^{\text{م}+\text{ن}}$ م و ن کی ہر قیمت کے لیے صادق ہے، تو م و ن میں سے ہر ایک کو $\frac{\text{د}}{\text{ص}}$ سے تبدیل کر کے ہمیں حاصل ہوا۔

$$\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}\times\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}} = \text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}+\frac{\text{د}}{\text{ص}}} = \text{ع}^{\frac{2\text{د}}{\text{ص}}}$$

ایسے ہی $\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}\times\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}\times\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}} = \text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}\times\text{ع}^{\frac{2\text{د}}{\text{ص}}} = \text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}+\frac{2\text{د}}{\text{ص}}} = \text{ع}^{\frac{3\text{د}}{\text{ص}}}$

اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے 4، 5،...... تا ص اجزاء، حاصل ہوا

$\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}\times\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}\times\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}$ ...... تا د اجزاء ضربی = $\text{ع}^{\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{ص}}}$

یعنی $\left(\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}\right)^{\text{ص}} = \text{ع}^{\text{د}}$

لہذا ص واں جذر اخذ کر کے $\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}} = \sqrt[\text{ص}]{\text{ع}^{\text{د}}}$

یا دوسرے الفاظ میں $\text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}$ متساوی ہے "$\text{ع}^{\text{د}}$ کے ص ویں جذر" کے۔

مثال:

1. $\text{س}^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{\text{س}^5}$
2. $\text{ع}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\text{ع}}$
3. $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$
4. $\text{ع}^{\frac{2}{3}}\times\text{ع}^{\frac{5}{6}} = \text{ع}^{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = \text{ع}^{\frac{3}{2}}$
5. $\text{ک}^{\frac{\text{ع}}{2}}\times\text{ک}^{\frac{2}{3}} = \text{ک}^{\frac{\text{ع}}{2}+\frac{2}{3}} = \text{ک}^{\frac{3\text{ع}+4}{2}}$
6. $3\text{ع}^{\frac{2}{3}}\text{ب}^{\frac{1}{2}}\times4\text{ع}^{\frac{1}{6}}\text{ب}^{\frac{5}{6}} = 12\text{ع}^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\text{ب}^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}} = 12\text{ع}^{\frac{5}{6}}\text{ب}^{\frac{4}{3}}$

238. $ع^{0}$ کے معنی کی تلاش۔

چونکہ $ع^{م} \times ع^{ن} = ع^{م+ن}$ م و ن کی تمام قیمتوں کے لیے صادق ہے۔ تو قدر م

کو 0 سے تبدیل کر کے ہم نے حاصل کیا

$$ع^{0} \times ع^{ن} = ع^{0+ن} = ع^{ن}$$

$$ع^{0} = \frac{ع^{ن}}{ع^{ن}} = 1$$

لہذا کوئی بھی قدر جس کی قیمت 0 ہو وہ 1 کے متساوی ہوگی۔

[مضموم 47]

مثال: $س^{ب-ج} \times س^{ب-ج} = س^{ب-ج+ج-ب} = س^{0} = 1$

239. $ع^{-ن}$ کی معنی کی تلاش۔

چونکہ $ع^{م} \times ع^{ن} = ع^{م+ن}$ م و ن کی تمام قیمتوں پہ صادق ہے۔ تو قدر م کو -ن

سے تبدیل کر کے ہمیں حاصل ہوا۔

$$ع^{-ن} \times ع^{ن} = ع^{-ن+ن} = ع^{0} = 1$$

لہذا $ع^{-ن} = \frac{1}{ع^{ن}}$

و $ع^{ن} = \frac{1}{ع^{-ن}}$

تو ہم نے دیکھا کہ کسی بھی مقدار کو محض اس کی علامت بدل کے ما

فوق سے ما تحت میں منتقل کیا جا سکتا ہے و ایسے ہی اس کا عکس ہے۔

مثال اول: $س^{-3} = \frac{1}{س^{3}}$

دوم: $\frac{1}{ف^{-\frac{1}{2}}} = ف^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ف}$

سوم: $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(27)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

240. م و ن کی تمام قیمتوں پہ $\text{ع}^{\text{م}} \div \text{ع}^{\text{ن}} = \text{ع}^{\text{م}-\text{ن}}$ کا ثبوت۔

$$\text{ع}^{\text{م}} \div \text{ع}^{\text{ن}} = \text{ع}^{\text{م}} \times \frac{1}{\text{ع}^{\text{ن}}} = \text{ع}^{\text{م}} \times \text{ع}^{-\text{ن}} = \text{ع}^{\text{م}-\text{ن}}$$

مثال اول: $\text{ع}^{3} \div \text{ع}^{5} = \text{ع}^{3-5} = \text{ع}^{-2} = \frac{1}{\text{ع}^{2}}$

دوم: $\text{ب} \div \text{ب}^{-\frac{8}{5}} = \text{ب}^{1+\frac{8}{5}} = \text{ب}^{\frac{13}{5}}$

سوم: $\text{س}^{\text{ب}-\text{ع}} \div \text{س}^{\text{ج}-\text{ع}} = \text{س}^{\text{ب}-\text{ع}-(\text{ج}-\text{ع})} = \text{س}^{\text{ب}-\text{ج}}$

241. ایک نقش کے معنی تلاشنے کا طریقہ، جیسے کی پہلے ذکر گزرا، خوب توجہ کا تقاضا کرتا ہے۔ عام طرز جبری ہے نقوش کو وضع کرنا و انہیں معانی دینا پھر ان کی ترکیب کے قاعدے بیان کرنا۔ یہاں طرز منکعس ہے و نقوش و اس کے قواعد مذکور ہیں، پھر اس سے ہم نے نقوش کے معانی معین کیے۔

242. امثلہ گزشتہ ہمارے وضع کیے ہوئے درج ذیل اصول کو نمایا کرتی ہیں۔

مثال اول: $\frac{3\text{ع}^{-2}}{5\text{س}^{-1}\text{ف}} = \frac{3\text{س}}{5\text{ع}^{2}\text{ف}}$

دوم: $\frac{2\text{ع}^{\frac{1}{2}} \times \text{ع}^{\frac{2}{3}} \times 6\text{ع}^{-\frac{7}{3}}}{9\text{ع}^{-\frac{5}{3}} \times \text{ع}^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}\text{ع}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\text{ع}^{-1} = \frac{4}{3\text{ع}}$

سوم: $\frac{\sqrt[2]{\text{س}^3} \times \sqrt[3]{\text{ف}^2}}{\sqrt[4]{\text{س}^6} \times \sqrt[6]{\text{ف}^{-2}}} = \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}} \times \text{ف}^{\frac{2}{3}}}{\text{س}^{\frac{3}{2}} \times \text{ف}^{-\frac{1}{3}}} = \text{س}^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\ \text{ف}^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \text{س}^0\text{ف} = \text{ف}$

چہارم: $2\sqrt{\text{ع}} + \frac{3}{\text{ع}^{-\frac{1}{2}}} + \text{ع}^{\frac{5}{2}} = 2\text{ع}^{\frac{1}{2}} + 3\text{ع}^{\frac{1}{2}} + \text{ع}^{\frac{5}{2}}$

$= 5\text{ع}^{\frac{1}{2}} + \text{ع}^{\frac{5}{2}}$

$= \text{ع}^{\frac{1}{2}}(5 + \text{ع}^2)$

243. م و ن کی تمام قیمتوں پہ ہمیشہ $(\text{ع}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{ع}^{\text{من}}$ صادق ہونے کا ثبوت۔

مسئلہ اول: فرض کرو کہ ن صحیح ایجابی ہے

اب م کی قیمت خواہ کچھ ہو

$(\text{ع}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{ع}^{\text{م}}\times\text{ع}^{\text{م}}\times\text{ع}^{\text{م}}$ .... تا ن اجزاء ضربی

$= \text{ع}^{\text{م+م+م ...... تا ن حدود}}$

$= \text{ع}^{\text{من}}$

مسئلہ دوم: فرض کرو کہ م پہلے کے مثل غیر مقید ہے، و ن ایجابی مکسور ہے۔ تو ن کو $\frac{\text{د}}{\text{ص}}$ سے تبدیل کیا، جب کہ د و ص صحیح ایجابی ہیں، تو ہمیں حاصل ہوا $(\text{ع}^{\text{م}})^{\text{ن}} = (\text{ع}^{\text{م}})^{\frac{\text{د}}{\text{ص}}}$

اب $(ع^{م})^{\frac{د}{ص}}$ کی ص ویں قدر ہوئی

$$\{(ع^{م})^{\frac{د}{ص}}\}^{ص} = (ع^{م})^{\frac{د}{ص}\times ص} = (ع^{م})^{د} = ع^{مد}$$

لہذا ان مساوات کا ص واں جذر اخذ کیا تو

$$(ع^{م})^{\frac{د}{ص}} = \sqrt[ص]{ع^{مد}} = ع^{\frac{مد}{ص}}$$ [مضمون 237]

مسئلہ سوم: فرض کرو کہ م پہلے کے مثل غیر مفید ہے، و ن کوئی سلبی مقدار ہے۔ تو ن کو ‎-د‎ سے بدلا جب کہ د ایجابی ہے، تو ہمیں حاصل ہوا۔

$$(ع^{م})^{ن} = (ع^{م})^{-د} = \frac{1}{(ع^{م})^{د}} = \frac{1}{ع^{مد}} = ع^{-مد} = ع^{من}$$

تو مضمون 235 کا مقدمہ سوم $(ع^{م})^{ن} = ع^{من}$ کا ہر حال میں صادق ہونا ثابت ہو گیا۔

مثال اول: $(ب^{\frac{2}{3}})^{\frac{6}{7}} = ب^{\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}} = ب^{\frac{4}{7}}$

دوم: $\{(س^{-2})^{3}\}^{-4} = (س^{-6})^{-4} = س^{24}$

سوم: $(س^{\frac{1}{ء-ج}})^{ء^2-ج^2} = س^{\frac{1}{ء-ج}\times(ء^2-ج^2)} = س^{ء+ج}$

244. م کی قیمت چاہے جو ہو و ب چاہے جو مقدار ہو $(ع ب)^{م} = ع^{م} ب^{م}$ کا ثبوت۔

مسئلہ اول: فرض کرو کہ م صحیح ایجابی ہے

اب $(ع ب)^{م} = ع ب \times ع ب \times ع ب$ .... تا م اجزاء ضربی

= (ع×ع×ع .... تا م اجزاء)(ب×ب×ب .... تا م اجزاء)

$= ع^{م} ب^{م}$

مسئلہ دوم: فرض کرو کہ ه مکسور ایجابی ہے، و ه کو $\frac{\text{د}}{\text{ط}}$ سے بدل دیا، جب کہ د و ط صحیح ایجابی ہیں، تو ہمیں حاصل ہوا

$$(\text{عبـ})^{\text{ه}} = (\text{عبـ})^{\frac{\text{د}}{\text{ط}}}$$

اب $(\text{عبـ})^{\frac{\text{د}}{\text{ط}}}$ کی ط ویں قدر ہوئی $\{(\text{عبـ})^{\frac{\text{د}}{\text{ط}}}\}^{\text{ط}}$

$$= (\text{عبـ})^{\text{د}}$$

$$= \text{ع}^{\text{د}}\,\text{بـ}^{\text{د}}$$

ط واں جذر اخذ کیا تو $(\text{عبـ})^{\frac{\text{د}}{\text{ط}}} = \text{ع}^{\frac{\text{د}}{\text{ط}}}\,\text{بـ}^{\frac{\text{د}}{\text{ط}}}$

مسئلہ سوم: فرض کرو کہ ه کی قیمت سلبی ہے، و ه کو ‎-د‎ سے بدل دیا جب کہ د ایجابی ہے۔

$$(\text{عبـ})^{\text{ه}} = (\text{عبـ})^{-\text{د}} = \frac{1}{(\text{عبـ})^{\text{د}}} = \frac{1}{\text{ع}^{\text{د}}\,\text{بـ}^{\text{د}}} = \text{ع}^{-\text{د}}\,\text{بـ}^{-\text{د}}$$

تو مقدمہ کا کلیا صادق ہونا ثابت ہو گیا۔

جو نتیجہ ہم نے ابھی ثابت کیا ہے وہ الفاظ میں تعبیر کیا جا سکتا ہے کہ حاصل ضرب کی قدر اس کے اجزاء ضربی میں تقسیم ہو سکتی ہے۔

تنبیہ: کسی بھی قدر کو عبارت کی حدود میں تقسیم نہیں کیا جا سکتا۔ لہذا $(\text{ع}^{\frac{1}{2}} + \text{بـ}^{\frac{1}{2}})^2$ متساوی نہیں ہے ع+بـ کے۔ و $(\text{ع}^2 + \text{بـ}^2)^{\frac{1}{2}}$ متساوی ہے $\sqrt{(\text{ع}^2+\text{بـ}^2)}$ کے، و اسے مزید بسیط نہیں کیا جا سکتا۔

مثال اول: $(\text{فض})^{-\text{ءج}}\,(\text{ضس})^{\text{ج}}\,(\text{سف})^{-\text{ج}} = \text{ف}^{-\text{ءج}}\,\text{ض}^{-\text{ءج}}\,\text{ض}^{\text{ج}}\,\text{س}^{\text{ج}}\,\text{س}^{-\text{ج}}\,\text{ف}^{-\text{ج}}$

$= \text{ف}^{-\text{ءج}-2\text{ج}}\,\text{ض}^{\text{ج}}$

مثال دوم: $\{(\text{ع}-\text{بـ})^{\text{ک}}\}^{-\text{ل}} \times \{(\text{ع}+\text{بـ})^{-\text{ک}}\}^{\text{ل}} = (\text{ع}-\text{بـ})^{-\text{کل}} \times (\text{ع}+\text{بـ})^{-\text{کل}}$

$= \{(\text{ع}-\text{بـ})(\text{ع}+\text{بـ})\}^{-\text{کل}}$

$= (\text{ع}^2-\text{بـ}^2)^{-\text{کل}}$

245. یہ بات نظر میں رہے کہ مضمون 244 کے ثبوت میں مقادیر ع و بـ غیر مقید ہیں۔، و اقدار کو متضمن بھی ہو سکتی ہیں۔

مثال اول: $(\text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{ف}^{-\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} \div (\text{س}^{2}\,\text{ف}^{-1})^{-\frac{1}{3}} = \text{س}^{\frac{2}{3}}\,\text{ف}^{-\frac{2}{3}} \div \text{س}^{-\frac{2}{3}}\,\text{ف}^{\frac{1}{3}}$

$= \text{س}^{\frac{4}{3}}\,\text{ف}^{-1}$

دوم: $\left(\dfrac{\text{ع}^{\frac{2}{3}}\sqrt{\text{بـ}^{-1}}}{\sqrt[3]{\text{بـ}}\;\text{ع}^{-2}} \div \sqrt{\dfrac{\text{ع}\sqrt{\text{بـ}^{-4}}}{\sqrt{\text{بـ}}\;\text{ع}^{-2}}}\right)^{6} = \left(\dfrac{\text{ع}^{\frac{2}{3}}\,\text{بـ}^{-\frac{1}{2}}}{\text{بـ}\text{ع}^{-\frac{2}{3}}} \div \sqrt{\dfrac{\text{عبـ}^{-2}}{\text{بـع}^{-1}}}\right)^{6}$

$= (\text{ع}^{\frac{4}{3}}\,\text{بـ}^{-\frac{3}{2}} \div \sqrt{\text{ع}^{2}\,\text{بـ}^{-3}})^{6}$

$= (\text{ع}^{\frac{4}{3}}\,\text{بـ}^{-\frac{3}{2}} \div \text{عبـ}^{-\frac{3}{2}})^{6}$

$= (\text{ع}^{\frac{1}{3}})^{6} = \text{ع}^{2}$

246. چونکہ قوانین اقدار ہر حال میں صادق ہوتے ہیں، تو تمام اعمال عام جیسے ضرب و تقسیم و تضرب و عکس تضرب ان عبارات پہ بھی جاری ہوں جو اقدارِ مکسور و سلبی کو متضمن ہو۔

247. مضمون 121 میں ہم نے اشارہ کیا تھا کہ س کی ترتیب نزولی ہوگی

$$\ldots\ldots,\ س^{3},\ س^{2},\ س,\ 1,\ \frac{1}{س},\ \frac{1}{س^{2}},\ \frac{1}{س^{3}},\ \ldots\ldots$$

اس کی ایک وجہ ظاہر ہوتی ہے اگر اسے درج ذیل صورت پہ لکھا جائے۔

$$\ldots\ldots,\ س^{3},\ س^{2},\ س,\ 1,\ س,\ س^{-2},\ س^{-3},\ \ldots\ldots$$

مثال اول: $س + 2س^{\frac{2}{3}} + 3س^{-\frac{1}{3}}$ کو $س^{\frac{1}{3}} - 2$ سے ضرب دو۔

س کی اقدار نزولی پہ مرتب کیا

$$\begin{array}{r} س + 2س^{\frac{2}{3}} + 3س^{-\frac{1}{3}} \\ س^{\frac{1}{3}} - 2 \\ \hline س^{\frac{4}{3}} + 2س + 3 \\ -2س - 4س^{\frac{2}{3}} - 6س^{-\frac{1}{3}} \\ \hline س^{\frac{4}{3}} - 4س^{\frac{2}{3}} + 3 - 6س^{-\frac{1}{3}} \end{array}$$

مثال دوم: $16ع^{-3} - 6ع^{-2} + 5ع^{-1} + 6$ کو $1 + 2ع^{-1}$ سے تقسیم کرو

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8\text{ع}^{-2} - 7\text{ع}^{-1} + 6 \\
\hline
2\text{ع}^{-1} + 1 & 16\text{ع}^{-3} - 6\text{ع}^{-2} + 5\text{ع}^{-1} + 6 \\
 & 16\text{ع}^{-3} + 8\text{ع}^{-2} \\
\hline
 & -14\text{ع}^{-2} + 5\text{ع}^{-1} \\
 & -14\text{ع}^{-2} + 7\text{ع}^{-1} \\
\hline
 & 12\text{ع}^{-1} + 6 \\
 & 12\text{ع}^{-1} + 6
\end{array}
$$

مثال سوم: $\frac{4\text{س}^2}{\text{ف}} + \frac{\sqrt{\text{س}^3}}{\text{ف}^{-\frac{1}{2}}} - 2\text{س} + \frac{\text{ف}}{4} + \text{س}^3 - 4\sqrt{(\text{س}^5\,\text{ف}^{-1})}$ کا جذر مربع بتاؤ۔

علامت جذر و سلبی اقدار کو ختم کیا، پھر ف کی ترتیب نزولی پہ مرتب کیا تو حاصل ہوا۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{\text{ف}^{\frac{1}{2}}}{2} + \text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{2\text{س}}{\text{ف}^{\frac{1}{2}}} \\
\hline
 & \frac{\text{ف}}{4} + \text{ف}^{\frac{1}{2}}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{س}^3 - 2\text{س} + \frac{4\text{س}^{\frac{5}{2}}}{\text{ف}^{\frac{1}{2}}} + \frac{4\text{س}^2}{\text{ف}} \\
 & \frac{\text{ف}}{4} \\
\hline
\text{ف}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{\frac{3}{2}} & \text{ف}^{\frac{1}{2}}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{س}^3 \\
 & \text{ف}^{\frac{1}{2}}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{س}^3 \\
\hline
\text{ف}^{\frac{1}{2}} + 2\text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{2\text{س}}{\text{ف}^{\frac{1}{2}}} & -2\text{س} + \frac{4\text{س}^{\frac{5}{2}}}{\text{ف}^{\frac{1}{2}}} + \frac{4\text{س}^2}{\text{ف}} \\
 & -2\text{س} + \frac{4\text{س}^{\frac{5}{2}}}{\text{ف}^{\frac{1}{2}}} + \frac{4\text{س}^2}{\text{ف}} \\
\hline
\end{array}
$$

248. امثلۂ آیندہ ابواب سابقہ کے فارمولوں کو مکسور و سلبی اقدار والی عبارت میں جاری ہونے کو نمایا کریں گی۔

مثال اول: $(\text{ع}^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}-\text{ب}^{\frac{\text{ش}}{\text{ق}}})(\text{ع}^{-\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}+\text{ب}^{-\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}) = \text{ع}^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}-\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}-\text{ع}^{-\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}\,\text{ب}^{\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}+\text{ع}^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}\,\text{ب}^{-\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}-\text{ب}^{\frac{\text{ش}}{\text{ق}}-\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}$

$= 1-\text{ع}^{-\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}\,\text{ب}^{\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}+\text{ع}^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}\,\text{ب}^{-\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}-1$

$= \text{ع}^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}\,\text{ب}^{-\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}-\text{ع}^{-\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}}\,\text{ب}^{\frac{\text{ش}}{\text{ق}}}$

مثال دوم: $2\text{س}^{2\text{ھ}}-\text{س}^{\text{ھ}}+3$ کو $2\text{س}^{2\text{ھ}}+\text{س}^{\text{ھ}}-3$ سے ضرب۔

$= \{2\text{س}^{2\text{ھ}}-(\text{س}^{\text{ھ}}-3)\}\{2\text{س}^{2\text{ھ}}+(\text{س}^{\text{ھ}}-3)\}$

$= (2\text{س}^{2\text{ھ}})^2-(\text{س}^{\text{ھ}}-3)^2$

$= 4\text{س}^{4\text{ھ}}-\text{س}^{2\text{ھ}}+6\text{س}^{\text{ھ}}-9$

مثال سوم: $3\text{س}^{\frac{1}{2}}-2-\text{س}^{-\frac{1}{2}}$ کا مربع۔

$= 9\text{س}+4+\text{س}^{-1}-2\times3\text{س}^{\frac{1}{2}}\times2-2\times3\text{س}^{\frac{1}{2}}\times\text{س}^{-\frac{1}{2}}+2\times2\times\text{س}^{-\frac{1}{2}}$

$= 9\text{س}+4+\text{س}^{-1}-12\text{س}^{\frac{1}{2}}-6+4\text{س}^{-\frac{1}{2}}$

$= 9\text{س}-12\text{س}^{\frac{1}{2}}-2+4\text{س}^{-\frac{1}{2}}+\text{س}^{-1}$

حدود متشابہ کو اکٹھا و پھر سے مرتب کر کے۔

مثال چہارم: $(\text{ع}^{\frac{3\text{د}}{2}}+\text{ع}^{-\frac{3\text{د}}{2}})$ کو $(\text{ع}^{\frac{\text{د}}{2}}+\text{ع}^{-\frac{\text{د}}{2}})$ سے تقسیم کرنا۔

$$= (\text{ع}^{\frac{3\text{د}}{2}}+\text{ع}^{-\frac{3\text{د}}{2}}) \div (\text{ع}^{\frac{\text{د}}{2}}+\text{ع}^{-\frac{\text{د}}{2}})$$

$$= \{(\text{ع}^{\frac{\text{د}}{2}})^3+(\text{ع}^{-\frac{\text{د}}{2}})^3\} \div (\text{ع}^{\frac{\text{د}}{2}}+\text{ع}^{-\frac{\text{د}}{2}})$$

$$= (\text{ع}^{\frac{\text{د}}{2}})^2-\text{ع}^{\frac{\text{د}}{2}}\times\text{ع}^{-\frac{\text{د}}{2}}+(\text{ع}^{-\frac{\text{د}}{2}})^2$$

$$= \text{ع}^{\text{د}}-1+\text{ع}^{-\text{د}}$$